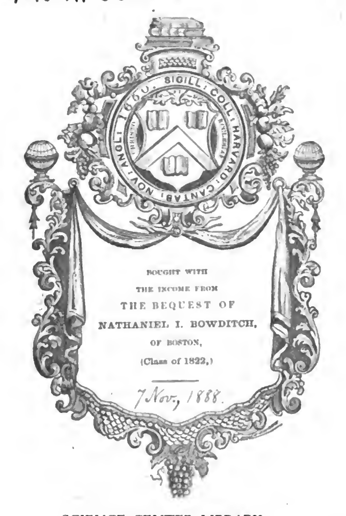
THEORIE DER ZWEIFACH UNENDLICHEN THEATAREIHEN AUF GRUND DER...

Adolf Krazer




SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650
BOUGHT WITH
THE INCOME FROM
THE BEQUEST OF
NATHANIEL I. BOWDITCH,
OF BOSTON,
(Class of 1822,)
7 Nov., 1888.

THEORIE

DER

ZWEIFACH UNENDLICHEN THETAREIHEN

AUF GRUND

DER RIEMANN'SCHEN THETAFORMEL

VON

DR. ADOLF KRAZER.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1882.

Vorwort.

Die Begründer der Theorie der zweifach unendlichen Thetareihen sind bekanntlich die Herren *Göpel* und *Rosenhain*, welche diese Transcendenten zum Zwecke der Lösung des Umkehrproblems der dem Falle $p = 2$ entsprechenden hyperelliptischen Integrale aufgestellt und die Theorie derselben soweit ausgebildet haben, als es ihnen zur Erreichung dieses Zieles nothwendig erschien. Das hierzu eingeschlagene Verfahren ist jedoch bei beiden Autoren wesentlich verschieden.

Den Ausgangspunkt für die Untersuchungen von *Göpel* *) bildet die Erkenntniss, dass sich aus den sechzehn Thetafunctionen auf mehrere Weisen vier auswählen lassen, durch deren Quadrate die Quadrate der zwölf übrigen linear ausgedrückt werden können. Hiervon ausgehend greift *Göpel*, anscheinend ganz willkürlich, vier Thetafunctionen heraus, drückt durch deren Quadrate die der zwölf übrigen aus und findet weiter, dass diese vier Functionen selbst durch eine eigenthümliche Relation vierten Grades, die sogenannte *Göpel*'sche biquadratische Relation, miteinander verknüpft sind. Ausser den so erhaltenen Gleichungen finden sich bei *Göpel* nur noch wenige Thetarelationen; auch tragen seine Formeln ein specielles Gepräge; sie sind für *Göpel* eben nur Hülfsmittel und nicht Selbstzweck.

Auf ganz anderem Wege geht Herr *Rosenhain* **) vor. Die Grundlage für seine Untersuchungen bildet eine Thetaformel, welche einer von *Jacobi* für die elliptischen Functionen aufgestellten entspricht und auch auf ähnlichem Wege gewonnen wird. Aus dieser als Stammformel leitet er dann das ganze System der zu derselben Kategorie gehörigen Thetaformeln her, stellt dieselben tabellarisch zusammen und gewinnt aus ihnen durch Specialisirung alle jene Relationen, welche für seine Lösung des Umkehrproblems nothwendig sind.

Vergleicht man die von den beiden Autoren zur Gewinnung von Thetarelationen angewandten Methoden mit einander, so gebührt der *Rosenhain*'schen der Vorzug, da bei ihr die sämmtlichen Formeln aus einer gemeinsamen Quelle abgeleitet werden, und

---

*) *Göpel*, Theoriae transcendentium Abelianarum primi ordinis adumbratio levis. Crelle's Journal, Bd. 35, pg. 277.

**) *Rosenhain*, Mémoire sur les fonctions de deux variables et à quatre périodes, qui sont les inverses des fonctions ultra-elliptiques de la première classe. Recueil des savants étrangers de l'académie des sciences de Paris, tome XI, pg. 361.

man dadurch in den Stand gesetzt ist, wenigstens einen Ueberblick über das ganze Gebiet der möglichen speciellen Formeln zu erhalten. Doch tragen auch die sämmtlichen *Rosenhain*'schen Formeln, ebenso wie die Quelle, aus der sie fliessen, ein individuelles Gepräge, insofern als allgemeine, d. h. mehrere Formeln umfassende Typen nicht gegeben werden. Der innere Grund hierfür ist darin zu suchen, dass die bei *Rosenhain* den Ausgangspunkt bildende Formel, die selbst schon eine secundäre ist, nur schwer ihres speciellen Charakters entkleidet werden kann, dann aber hauptsächlich darin, dass eine von allgemeinen Gesichtspunkten ausgehende Behandlung bei dem damaligen vollständigen Mangel einer Charakteristikentheorie nicht wohl möglich war.

Nach dem Erscheinen dieser grundlegenden Arbeiten vergingen beinahe dreissig Jahre, ohne dass die in Rede stehenden Thetarelationen eine von neuen Gesichtspunkten ausgehende Bearbeitung erfuhren, trotzdem innerhalb dieser Zeit die zweifach unendlichen Thetareihen nicht nur bei rein analytischen, sondern auch bei geometrischen und mechanischen Problemen eine immer grössere Bedeutung gewannen, auch die Theorie der Transformation derselben durch die Herren *Hermite**) und *Königsberger***) angebahnt wurde. Erst in den Arbeiten der Herren *Borchardt****) und *Weber*†) greift eine allgemeinere Auffassung Platz, insofern als die Genannten sich von speciellen Charakteristiken frei zu machen streben, und insbesondere Herr *Weber* die Thetarelationen in allgemeiner Gestalt zu gewinnen sucht. Die betreffenden Formeln werden aber bei Herrn *Weber* nicht aus einer einzigen Hauptformel abgeleitet, vielmehr benutzt derselbe, um zu den einzelnen Formeln zu gelangen, die Methode der unbestimmten Coefficienten, die zu ihrer Anwendung schon die Structur der zu gewinnenden Formeln als bekannt voraussetzt und daher weder über den inneren Grund der Entstehung noch über die Vollständigkeit des gewonnenen Formelsystems Aufschluss gibt.

Eine einheitliche, die verschiedenen Thetarelationen umfassende Theorie, wie ich sie im Folgenden zu geben versuche, ein Einblick in die Structurverhältnisse der Formeln und ihre Abhängigkeit von einander wurden erst möglich, nachdem die Fundamentalformel für diese Theorie gefunden war, aus der alle von sämmtlichen Autoren bis dahin gewonnenen Relationen zwischen den sechzehn Thetafunctionen direkt abgeleitet werden können. Diese Formel, welche die Grundlage meiner Untersuchungen bildet, geht aus einer für beliebiges p geltenden, von *Riemann* zu Anfang der sechziger Jahre aufgestellten und von meinem hochverehrten Lehrer Herrn Prof. *Prym*

---

*) *Hermite*, Sur la théorie de la transformation des fonctions Abéliennes. Comptes rendus, tome XL.

**) *Königsberger*, Ueber die Transformation der Abel'schen Functionen erster Ordnung. Crelle's Journal, Bd. 64 und 65.

***) *Borchardt*, Ueber die Darstellung der Kummer'schen Fläche vierter Ordnung mit sechzehn Knotenpunkten durch die Göpel'sche biquadratische Relation zwischen vier Thetafunctionen mit zwei Variabeln. Crelle's Journal, Bd. 83, pg. 234.

†) *Weber*, Anwendung der Thetafunctionen zweier Veränderlicher auf die Theorie der Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit. Math. Annalen, Bd. XIV, pg. 173, und: Ueber die Kummer'sche Fläche vierter Ordnung mit sechzehn Knotenpunkten und ihre Beziehung zu den Thetafunctionen mit zwei Veränderlichen. Crelle's Journal, Bd. 84, pg. 332.

zugleich mit ihrer Ableitung mitgetheilten Thetaformel*) hervor, indem man dieser die von Herrn *Prym* angegebene allgemeinere Gestalt (12') verleiht und hierauf, entsprechend dem vorliegenden speciellen Falle, für p den Werth 2 setzt.

Ueber den Inhalt und die Anordnung der vorliegenden Arbeit erlaube ich mir noch Folgendes beizufügen. Nachdem in Art. 1 die zweifach unendlichen Thetareihen definirt und ihre wesentlichen Eigenschaften angeführt sind, wird die eben erwähnte Fundamentalformel aufgestellt. Die bedeutende Rolle, welche die Charakteristiken der Thetareihen in der weiteren Untersuchung spielen, liess es wünschenswerth erscheinen, dieselben zunächst selbständig zu behandeln. Die im Laufe der Arbeit zur Anwendung kommenden Definitionen und Sätze, welch' letztere theilweise schon von Herrn *Weber* in den oben erwähnten Arbeiten gegeben wurden, sind daher in Art. 2 zusammengestellt. Im Anschluss hieran behandelt Art. 3 die Eigenschaften einiger aus Charakteristikenelementen gebildeter, häufig wiederkehrender Ausdrücke. Nach diesen Vorbereitungen wird in Art. 4 aus der Fundamentalformel ein merkwürdiges System linearer Gleichungen, (S), zwischen Grössen x und x' abstrahirt, das für die beabsichtigte Theorie von fundamentaler Bedeutung ist, insofern als es in gewissen aus ihm ableitbaren Gleichungen die Grundtypen für die zunächst aufzustellenden allgemeinen Thetaformeln liefert. Dasselbe bildet den dem Werthe $p=2$ entsprechenden speciellen Fall jenes allgemeinen Gleichungensystems, welches zuerst von Herrn *Prym***) in die Theorie der p-fach unendlichen Thetareihen eingeführt wurde und dort dieselbe Rolle spielt, wie das System (S) in dem speciellen Falle $p=2$. Die Behandlung des Systems (S) führt nun in den Art. 5, 6, 7, 8 zunächst zu Gleichungen, von denen jede vier Grössen x und vier Grössen x' enthält, und welche, entsprechend der Unterscheidung der in ihnen auftretenden Systeme von je vier Charakteristiken in Vierersysteme erster und zweiter Art, in zwei verschiedene Classen zerfallen. In Art. 9 wird dann das Gleichungensystem (S) in der Weise specialisirt, dass die den sechs ungeraden Charakteristiken entsprechenden Grössen x' der Null gleich gesetzt werden. Die dadurch geschaffenen Beziehungen zwischen den Grössen x liefern eine eigenthümliche Zerspaltung der den zehn übrigen Grössen x' entsprechenden Gleichungen und führen schliesslich in Art. 10 zu den den *Rosenhain*'schen Sechsersystemen entsprechenden Relationen zwischen sechs Grössen x.

Nachdem auf diese Weise das Gleichungensystem (S) vollständig behandelt ist, beschäftigen sich die zunächst folgenden Artikel damit, die gewonnenen Gleichungen in x, x' für die Herstellung von Thetaformeln zu verwerthen. Der Art. 11 handelt in Kürze von den den Gleichungen der Art. 6, 7 entsprechenden Thetaformeln und berücksichtigt insbesondere ihre Beziehungen zu den in den *Rosenhain*'schen Tafeln enthaltenen. In Art. 12 werden dann die in Art. 4 mit x, x' bezeichneten, den Gleichungen (S) unter allen Umständen genügenden Thetaproducte den Bedingungen des Art. 9

---

*) *Prym*, Untersuchungen über die Riemann'sche Thetaformel und die Riemann'sche Charakteristikentheorie. Leipzig 1882, Teubner. Auf dieselbe Arbeit ist auch das auf Seite 2 stehende Citat zu beziehen.

**) *Prym*, a. c. O., Ueber ein für die Theorie der Thetafunctionen fundamentales System linearer Gleichungen.

entsprechend in ihren Variablen specialisirt und in die Formel (R) des Art. 9 eingeführt. Auf diese Weise entsteht aus (R) die fundamentale Thetaformel (Θ), welche, entsprechend den möglichen Verfügungen über die in ihr vorkommenden Argumente, das unter A, B, C aufgeführte vollständige System von Thetarelationen liefert. Mit der Discussion der gewonnenen Formeln beschäftigt sich der Art. 13, während den Art. 14, 15, 16 die Aufgabe zufällt, die Totalität der aus denselben hervorgehenden speciellen Gleichungen auf eine geringste Anzahl von einander unabhängiger zu reduciren. Dieses Problem wird in doppelter Weise durchgeführt, indem das eine Mal (Art. 14, 15), in Verallgemeinerung des *Rosenhain*'schen Verfahrens, vier Functionen, deren Charakteristiken ein beliebiges Vierersystem zweiter Art bilden, das andere Mal (Art. 16), in Verallgemeinerung des *Göpel*'schen Verfahrens, vier Functionen, deren Charakteristiken ein beliebiges Vierersystem erster Art bilden, zum Ausgangspunkt genommen werden. Bei dieser Behandlung zeigt sich ein merkwürdiger, bis dahin nicht bemerkter Parallelismus zwischen den Untersuchungen *Göpel*'s und *Rosenhain*'s, der am Schlusse des Art. 16 näher beleuchtet wird. In Art. 17 endlich wird anhangsweise das Additionstheorem der dem Falle $p = 2$ entsprechenden Thetaquotienten in allgemeinster Form aufgestellt.

Die vorliegende Arbeit verdankt ihre Entstehung den Anregungen, die ich als Mitglied des von Herrn Prof. *Prym* geleiteten mathematischen Oberseminars der Universität Würzburg empfangen habe, und für welche ich an dieser Stelle meinem hochverehrten Lehrer den wärmsten Dank ausspreche. Stehe ich mit meinen Untersuchungen auch vielfach auf den Schultern meiner Vorgänger, so glaube ich doch die einheitliche, von jeder Unterscheidung zwischen den sechs ungeraden Charakteristiken absehende Behandlung der gestellten Probleme als einen Fortschritt betrachten zu dürfen.

Würzburg, im Juli 1881.

Dr. Adolf Krazer.

Berichtigung.

Auf pag. 32, Z. 21, 22 muss es heissen:

$$x_{[\varepsilon]} = (-1)^{(\varepsilon)(\varrho\sigma)'}\, \vartheta[\varepsilon]((u))\, \vartheta[\varepsilon\varrho]((v))\, \vartheta[\varepsilon\sigma]((w))\, \vartheta[\varepsilon\varrho\sigma]((-u-v-w)),$$

$$x'_{[\eta]} = (-1)^{(\eta)(\varrho\sigma)'}\, \vartheta[\eta]((0))\, \vartheta[\eta\varrho]((u+v))\, \vartheta[\eta\sigma]((u+w))\, \vartheta[\eta\varrho\sigma]((-v-w)):$$

THEORIE

DER

ZWEIFACH UNENDLICHEN THETAREIHEN

AUF GRUND

DER RIEMANN'SCHEN THETAFORMEL.

1.

Die zweifach unendliche ϑ-Reihe:

$$\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon_2\\ \varepsilon_1' & \varepsilon_2'\end{bmatrix}(v_1\, v_2)$$

$$=\sum_{m_1=-\infty}^{m_1=+\infty}\sum_{m_2=-\infty}^{m_2=+\infty} e^{a_{11}\left(m_1+\frac{\varepsilon_1}{2}\right)^2+2a_{12}\left(m_1+\frac{\varepsilon_1}{2}\right)\left(m_2+\frac{\varepsilon_2}{2}\right)+a_{22}\left(m_2+\frac{\varepsilon_2}{2}\right)^2+2\left(m_1+\frac{\varepsilon_1}{2}\right)\left(v_1+\frac{\varepsilon_1'}{2}\pi i\right)+2\left(m_2+\frac{\varepsilon_2}{2}\right)\left(v_2+\frac{\varepsilon_2'}{2}\pi i\right)},$$

in welcher ε_1, ε_2, ε_1', ε_2' ganze Zahlen, $a_{11}=a_{11}'+a_{11}''i$, $a_{12}=a_{12}'+a_{12}''i$, $a_{22}=a_{22}'+a_{22}''i$ dagegen beliebige complexe Constanten bezeichnen, welche nur den zur Convergenz der Reihe nöthigen Bedingungen ($a_{11}'<0$, $a_{12}'^2-a_{11}'a_{22}'<0$) unterworfen sind, ist als einwerthige und für endliche v auch stetige Function der complexen Veränderlichen v_1, v_2 durch die Bedingungen:

$$(1)\quad \vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon_2\\ \varepsilon_1' & \varepsilon_2'\end{bmatrix}(v_1+\pi i\,|\,v_2)=(-1)^{\varepsilon_1}\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon_2\\ \varepsilon_1' & \varepsilon_2'\end{bmatrix}(v_1|v_2),\quad \vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon_2\\ \varepsilon_1' & \varepsilon_2'\end{bmatrix}(v_1|v_2+\pi i)=(-1)^{\varepsilon_2}\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon_2\\ \varepsilon_1' & \varepsilon_2'\end{bmatrix}(v_1|v_2),$$

$$(2)\quad \begin{cases}\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon_2\\ \varepsilon_1' & \varepsilon_2'\end{bmatrix}(v_1+a_{11}\,|\,v_2+a_{12})=(-1)^{\varepsilon_1'}\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon_2\\ \varepsilon_1' & \varepsilon_2'\end{bmatrix}(v_1|v_2)e^{-2v_1-a_{11}},\\ \vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon_2\\ \varepsilon_1' & \varepsilon_2'\end{bmatrix}(v_1+a_{12}\,|\,v_2+a_{22})=(-1)^{\varepsilon_2'}\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon_2\\ \varepsilon_1' & \varepsilon_2'\end{bmatrix}(v_1|v_2)e^{-2v_2-a_{22}}\end{cases}$$

bis auf einen von den Variablen v freien constanter Factor bestimmt.

Der Zahlencomplex $\begin{bmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon_2\\ \varepsilon_1' & \varepsilon_2'\end{bmatrix}$, der, wenn dadurch kein Missverständniss zu befürchten ist, in der Folge abgekürzt mit $[\varepsilon]$ bezeichnet werden soll, heisst die Charakteristik der ϑ-Reihe.

Aus der die ϑ-Reihe darstellenden zweifach unendlichen Reihe lassen sich ohne Mühe folgende Gleichungen ableiten:

$$(3)\quad \vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1\pm 2 & \varepsilon_2\\ \varepsilon_1' & \varepsilon_2'\end{bmatrix}(v_1|v_2)=\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon_2\\ \varepsilon_1' & \varepsilon_2'\end{bmatrix}(v_1|v_2),\qquad \vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon_2\pm 2\\ \varepsilon_1' & \varepsilon_2'\end{bmatrix}(v_1|v_2)=\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon_2\\ \varepsilon_1' & \varepsilon_2'\end{bmatrix}(v_1|v_2),$$

$$(4)\quad \vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon_2\\ \varepsilon_1'\pm 2 & \varepsilon_2'\end{bmatrix}(v_1|v_2)=(-1)^{\varepsilon_1}\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon_2\\ \varepsilon_1' & \varepsilon_2'\end{bmatrix}(v_1|v_2),\quad \vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon_2\\ \varepsilon_1' & \varepsilon_2'\pm 2\end{bmatrix}(v_1|v_2)=(-1)^{\varepsilon_2}\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon_2\\ \varepsilon_1' & \varepsilon_2'\end{bmatrix}(v_1\, v_2),$$

$$(5)\qquad \vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon_2\\ \varepsilon_1' & \varepsilon_2'\end{bmatrix}(-v_1\,|\,-v_2)=(-1)^{\varepsilon_1\varepsilon_1'+\varepsilon_2\varepsilon_2'}\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon_2\\ \varepsilon_1' & \varepsilon_2'\end{bmatrix}(v_1|v_2).$$

Die Gleichungen (3), (4) zeigen, dass, wenn man von den constanten Factoren ± 1 absieht, im Ganzen nur sechzehn wesentlich verschiedene ϑ-Reihen existiren, als welche diejenigen genommen werden können, deren Charakteristiken nur die Zahlen 0, 1 enthalten; solche Charakteristiken werden Normalcharakteristiken genannt. Die Gleichung (5)

lässt erkennen, dass die ϑ-Reihe eine gerade oder ungerade Function ist, je nachdem $\varepsilon_1\varepsilon_1' + \varepsilon_2\varepsilon_2' \equiv 0 \pmod{2}$ oder $\varepsilon_1\varepsilon_1' + \varepsilon_2\varepsilon_2' \equiv 1 \pmod{2}$ ist. Der Ausdruck $(-1)^{\varepsilon_1\varepsilon_1' + \varepsilon_2\varepsilon_2'}$ soll in der Folge zur Abkürzung durch das Symbol $(-1)^{\varepsilon}$ vertreten werden.

Bezeichnet man ferner das System:

$$v_1 + \frac{\varkappa_1}{2} a_{11} + \frac{\varkappa_2}{2} a_{12} + \frac{\varkappa_1'}{2} \pi i \mid v_2 + \frac{\varkappa_1}{2} a_{12} + \frac{\varkappa_2}{2} a_{22} + \frac{\varkappa_2'}{2} \pi i,$$

wo unter $\varkappa, \varkappa'$ ganze Zahlen zu verstehen sind, symbolisch mit $\left(v + \left|\begin{smallmatrix}\varkappa \\ \varkappa'\end{smallmatrix}\right|\right)$, entsprechend auch $v_1\ v_2$ mit (v), so erhält man die im Späteren wiederholt zur Anwendung kommende Relation:

$$(6)\ \vartheta[\varepsilon]\left(\!\left(v + \left|\begin{matrix}\varkappa \\ \varkappa'\end{matrix}\right|\right)\!\right)$$

$$= \vartheta[\varepsilon + \varkappa]((v)) e^{-\left(a_{11}\frac{\varkappa_1^2}{4} + 2a_{12}\frac{\varkappa_1\varkappa_2}{4} + a_{22}\frac{\varkappa_2^2}{4}\right) - \varkappa_1\left(v_1 + \frac{\varepsilon_1'}{2}\pi i + \frac{\varkappa_1'}{2}\pi i\right) - \varkappa_2\left(v_2 + \frac{\varepsilon_2'}{2}\pi i + \frac{\varkappa_2'}{2}\pi i\right)},$$

und, unter λ, λ' gleichfalls ganze Zahlen verstanden, noch die folgende:

$$(7)\qquad \vartheta[\varepsilon]\left(\!\left(v + \left|\begin{matrix}2\lambda \\ 2\lambda'\end{matrix}\right|\right)\!\right) = (-1)^{[\varepsilon]|(\lambda)} \vartheta[\varepsilon]((v)) e^{-(a_{11}\lambda_1^2 + 2a_{12}\lambda_1\lambda_2 + a_{22}\lambda_2^2) - 2\lambda_1 v_1 - 2\lambda_2 v_2},$$

wo $(-1)^{[\varepsilon]|(\lambda)}$ zur Abkürzung an Stelle von $(-1)^{\varepsilon_1\lambda_1' + \varepsilon_1'\lambda_1 + \varepsilon_2\lambda_2' + \varepsilon_2'\lambda_2}$ gesetzt ist.

Definirt man endlich, unter $(u), (v), (w), (t)$ unabhängige Veränderliche verstanden, die Variablen $(u'), (v'), (w'), (t')$ durch die orthogonalen involutorischen Gleichungensysteme:

$$(J)\qquad \begin{aligned} u_1 + v_1 + w_1 + t_1 &= 2u_1', & u_2 + v_2 + w_2 + t_2 &= 2u_2', \\ u_1 + v_1 - w_1 - t_1 &= 2v_1', & u_2 + v_2 - w_2 - t_2 &= 2v_2', \\ u_1 - v_1 + w_1 - t_1 &= 2w_1', & u_2 - v_2 + w_2 - t_2 &= 2w_2', \\ u_1 - v_1 - w_1 + t_1 &= 2t_1', & u_2 - v_2 - w_2 + t_2 &= 2t_2', \end{aligned}$$

so liefert zu diesen Systemen die in der Einleitung erwähnte *Riemann*'sche Fundamentalformel, in der ihr von Herrn *Prym* gegebenen allgemeineren Gestalt (12')*), für $p = 2$ die Gleichung:

$$(8)\qquad 4\vartheta[\eta]((2u'))\vartheta[\eta+\varrho]((2v'))\vartheta[\eta+\sigma]((2w'))\vartheta[\eta-\varrho-\sigma]((2t'))$$

$$= \sum_{[\varepsilon]} (-1)^{[\varepsilon]|[\eta]} \vartheta[\varepsilon]((2u))\vartheta[\varepsilon+\varrho]((2v))\vartheta[\varepsilon+\sigma]((2w))\vartheta[\varepsilon-\varrho-\sigma]((2t)),$$

welche die Grundlage für die folgenden Untersuchungen bildet. In ihr bezeichnen $[\eta+\varrho]$, $[\eta+\sigma]$, $[\eta-\varrho-\sigma]$ drei Charakteristiken, deren Elemente sich aus den entsprechenden Elementen der drei willkührlich wählbaren Charakteristiken $[\eta]$, $[\varrho]$, $[\sigma]$ in der durch die Bezeichnung hinreichend markirten Weise zusammensetzen, während die drei rechts stehenden Charakteristiken $[\varepsilon+\varrho]$, $[\varepsilon+\sigma]$, $[\varepsilon-\varrho-\sigma]$ in gleicher Weise aus $[\varepsilon]$, $[\varrho]$, $[\sigma]$ entstehen (vergl. Def. 3. im folgenden Art.). Es vertritt ferner das Symbol $(-1)^{[\varepsilon]|[\eta]}$ den Ausdruck $(-1)^{\varepsilon_1\eta_1' + \varepsilon_1'\eta_1 + \varepsilon_2\eta_2' + \varepsilon_2'\eta_2}$, und endlich ist die

---

*) *Prym*, Die *Riemann*'sche Thetaformel und ihre Verallgemeinerung. Leipzig 1881, Teubner.

Summation auf der rechten Seite über alle Terme zu erstrecken, die aus dem allgemeinen Gliede entstehen, wenn man darin an Stelle von $[\varepsilon]$ der Reihe nach sämmtliche sechzehn Normalcharakteristiken treten lässt.

2.

Zunächst sollen die Charakteristiken der ϑ-Reihen als selbständige Zahlencomplexe betrachtet werden. In Bezug auf dieselben gelten folgende Definitionen und Sätze:

Def. 1. Eine Charakteristik $[\varepsilon]$ *soll gerade oder ungerade genannt werden, je nachdem* $\varepsilon_1\varepsilon_1' + \varepsilon_2\varepsilon_2' \equiv 0$ *(mod. 2) oder* $\varepsilon_1\varepsilon_1' + \varepsilon_2\varepsilon_2' \equiv 1$ *(mod. 2) ist.*

Mit der Charakteristik $[\varepsilon]$ ist dann, nach (5) des Art. 1., zugleich immer auch die Function $\vartheta[\varepsilon]((v))$ gerade und ungerade, und es verschwindet $\vartheta[\varepsilon]((0))$ für jede ungerade Charakteristik $[\varepsilon]$.

Def. 2. Zwei Charakteristiken $[\varepsilon]$, $[\eta]$ *sollen congruent genannt werden,* $[\varepsilon] \equiv [\eta]$, *wenn ihre entsprechenden Elemente sich nur um gerade Zahlen unterscheiden, d. h. wenn* $\varepsilon_1 \equiv \eta_1$, $\varepsilon_2 \equiv \eta_2$, $\varepsilon_1' \equiv \eta_1'$, $\varepsilon_2' \equiv \eta_2'$ *(mod. 2) ist.*

Def. 3. Unter der Summe oder Differenz, $[\varepsilon] = [\zeta] \pm [\eta]$, *zweier Charakteristiken* $[\zeta]$ *und* $[\eta]$ *soll diejenige Charakteristik* $[\varepsilon] = [\zeta \pm \eta]$ *verstanden werden, deren Elemente durch die Gleichungen* $\varepsilon_1 = \zeta_1 \pm \eta_1$, $\varepsilon_2 = \zeta_2 \pm \eta_2$, $\varepsilon_1' = \zeta_1' \pm \eta_1'$, $\varepsilon_2' = \zeta_2' \pm \eta_2'$ *bestimmt sind.*

In der Folge soll die Summe $[\zeta + \eta]$ zweier Charakteristiken $[\zeta]$ und $[\eta]$, wenn dadurch kein Missverständniss zu befürchten ist, mit $[\zeta\eta]$ bezeichnet werden.

Def. 4. Von einer Charakteristik $[\varepsilon]$ *soll gesagt werden, dass sie in die Charakteristiken* $[\zeta]$ *und* $[\eta]$ *zerlegbar sei, wenn zwischen den drei Charakteristiken* $[\varepsilon]$, $[\zeta]$, $[\eta]$ *die Congruenz* $[\varepsilon] \equiv [\zeta] + [\eta]$ *besteht.*

Satz 1. Von den sechzehn Normalcharakteristiken sind zehn, nämlich:

$$\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix},$$

gerade, die übrigen sechs, nämlich:

$$\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix},$$

ungerade.

Trennt man die sechs ungeraden Charakteristiken in die beiden Gruppen:

$$\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix} \text{ und } \begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}$$

und bezeichnet die Charakteristiken einer dieser beiden Gruppen in beliebiger Reihenfolge mit $[\alpha_1]$, $[\alpha_2]$, $[\alpha_3]$, die der anderen mit $[\beta_1]$, $[\beta_2]$, $[\beta_3]$, versteht ferner unter $[\omega_1]$, $[\omega_2]$, ..., $[\omega_6]$ dieselben sechs ungeraden Charakteristiken aber in beliebiger Reihenfolge und bezeichnet endlich die Charakteristik $\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$ abgekürzt mit $[0]$, so ergibt sich durch direkte Addition der

Satz 2. Zwischen den sechs ungeraden Charakteristiken und der Charakteristik $[0]$ *bestehen die drei Relationen:*

$$[\alpha_1] + [\alpha_2] + [\alpha_3] \equiv [0], \qquad [\beta_1] + [\beta_2] + [\beta_3] \equiv [0],$$
$$[\omega_1] + [\omega_2] + [\omega_3] + [\omega_4] + [\omega_5] + [\omega_6] \equiv [0],$$

von denen jede eine Folge der beiden übrigen ist.

Da die linken Seiten der drei letzten Congruenzen die einzigen der [0] congruenten Summen von ungeraden Normalcharakteristiken repräsentiren, so folgt weiter, dass von den fünfzehn Charakteristiken, welche aus den sechs ungeraden durch Summation von je zweien gebildet werden können, keine einer andern derselben, auch keine der [0] congruent sein kann; es sind daher dieselben nothwendig den fünfzehn von [0] verschiedenen Normalcharakteristiken einzeln congruent, und zwar entsprechen die Charakteristiken:

$$[\alpha_1\alpha_2] \equiv [\alpha_3],\ [\alpha_2\alpha_3] \equiv [\alpha_1],\ [\alpha_3\alpha_1] \equiv [\alpha_2],\quad [\beta_1\beta_2] \equiv [\beta_3],\ [\beta_2\beta_3] \equiv [\beta_1],\ [\beta_3\beta_1] \equiv [\beta_2]$$

den sechs ungeraden, die Charakteristiken

$$[\alpha_1\beta_1],\ [\alpha_1\beta_2],\ [\alpha_1\beta_3],\quad [\alpha_2\beta_1],\ [\alpha_2\beta_2],\ [\alpha_2\beta_3],\quad [\alpha_3\beta_1],\ [\alpha_3\beta_2],\ [\alpha_3\beta_3]$$

den neun, von [0] verschiedenen geraden Charakteristiken. Desshalb gilt auch umgekehrt der

Satz 3. *Jede der* [0] *nicht congruente Charakteristik* $[\varepsilon]$ *lässt sich immer und nur auf eine Weise in zwei ungerade Normalcharakteristiken zerlegen.*

Entspricht der Charakteristik $[\varepsilon]$ die Zerlegung $[\varepsilon] \equiv [\omega_1] + [\omega_2]$, so ergibt sich aus dieser Congruenz, indem man dazu die Congruenz $[0] \equiv [\omega_1] + \cdots + [\omega_6]$ addirt, die neue: $[\varepsilon] \equiv [\omega_3] + [\omega_4] + [\omega_5] + [\omega_6]$. Eine zweite derartige Zerlegung von $[\varepsilon]$ in vier von einander verschiedene ungerade Normalcharakteristiken ist nicht möglich, da dieselbe rückwärts eine zweite, von $[\varepsilon] \equiv [\omega_1] + [\omega_2]$ verschiedene Zerlegung von $[\varepsilon]$ in zwei ungerade Normalcharakteristiken nach sich ziehen würde. Man gelangt auf diese Weise zu dem

Satz 4. *Jede der* [0] *nicht congruente Charakteristik* $[\varepsilon]$ *lässt sich immer und nur auf eine Weise in vier von einander verschiedene ungerade Normalcharakteristiken zerlegen.*

Bildet man aus den sechs ungeraden Charakteristiken alle Summen von je dreien, so zeigt ein Blick auf die Congruenzen:

$$[\alpha_1] + [\alpha_2] + [\alpha_3] \equiv [0], \qquad [\beta_1] + [\beta_2] + [\beta_3] \equiv [0],$$
$$[\alpha_1] + [\alpha_2] + [\beta_3] \equiv [\alpha_3\beta_3], \qquad [\beta_1] + [\beta_2] + [\alpha_3] \equiv [\alpha_3\beta_3],$$

dass die zwanzig auf diese Weise entstehenden Charakteristiken sämmtlich gerade sind, auch, dass irgend zwei der so gebildeten Charakteristiken dann aber auch nur dann einander congruent sind, wenn sie, als Summen dargestellt, zusammen alle sechs ungeraden Charakteristiken enthalten. Es zerfallen daher die zwanzig Charakteristiken in zehn Paare von je zwei derselben geraden Normalcharakteristik congruenten Charakteristiken. Diesen Resultaten entspricht der

Satz 5. *Die Summe von irgend drei der sechs ungeraden Charakteristiken ist stets eine gerade Charakteristik. Umgekehrt lässt sich jede gerade Charakteristik (die Charakteristik* [0] *nicht ausgeschlossen) immer und zwar auf zwei Weisen in drei ungerade Normalcharakteristiken zerlegen.*

Weiter gelten noch folgende Sätze, welche sich aus den allgemeinen, von *Riemann* herrührenden Charakteristikensätzen durch Specialisirung unmittelbar ergeben:

Satz 6. Jede der $[0]$ *nicht congruente Charakteristik* $[\varepsilon]$ *lässt sich immer auf drei Weisen in zwei gerade Normalcharakteristiken zerlegen.*

Satz 7. Jede der $[0]$ *nicht congruente Charakteristik* $[\varepsilon]$ *lässt sich immer auf vier Weisen in eine gerade und eine ungerade Normalcharakteristik zerlegen.*

Um für eine beliebige Charakteristik $[\varepsilon]$ die in den beiden letzten Sätzen erwähnten Zerlegungen zu finden, denke man sich $[\varepsilon]$ nach Satz 3. in zwei ungerade Normalcharakteristiken zerlegt und die Bezeichnung der ungeraden Charakteristiken so gewählt, dass $[\varepsilon] \equiv [\omega_1 \omega_2]$ ist. Die Congruenzen:

$$[\varepsilon] \equiv [\omega_1 \omega_2] \equiv [\omega_1 \omega_3 \omega_4] + [\omega_2 \omega_3 \omega_4] \equiv [\omega_1 \omega_3 \omega_5] + [\omega_2 \omega_3 \omega_5] \equiv [\omega_1 \omega_3 \omega_6] + [\omega_2 \omega_3 \omega_6],$$

$$[\varepsilon] \equiv [\omega_1 \omega_2] \equiv [\omega_1 \omega_2 \omega_3] + [\omega_3] \equiv [\omega_1 \omega_2 \omega_4] + [\omega_4] \equiv [\omega_1 \omega_2 \omega_5] + [\omega_5] \equiv [\omega_1 \omega_2 \omega_6] + [\omega_6]$$

liefern dann, wenn man darin an Stelle jeder Charakteristik von der Form $[\omega_\varkappa \omega_\lambda \omega_\mu]$ die ihr congruente, immer gerade, Normalcharakteristik setzt, die gewünschten Zerlegungen der Charakteristik $[\varepsilon]$.

Die Sätze 3., 6., 7. lassen sich schliesslich noch zusammenfassen in den

Satz 8. Addirt man zu den sechs ungeraden Normalcharakteristiken eine beliebige der $[0]$ *nicht congruente Charakteristik, so gehen dadurch zwei derselben wieder in ungerade, die übrigen vier in gerade über; addirt man dagegen zu den zehn geraden Normalcharakteristiken eine beliebige der* $[0]$ *nicht congruente Charakteristik, so gehen dadurch sechs derselben wieder in gerade, die übrigen vier in ungerade über.*

Die sechzehn Normalcharakteristiken kann man sich aus den vier Charakteristiken:

$$[\varepsilon_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad [\varepsilon_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad [\varepsilon_3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad [\varepsilon_4] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

durch Addition aufgebaut denken und nach dem von Herrn *Prym* gegebenen Schema:

$$[0],\ [\varepsilon_1] \mid [\varepsilon_2],\ [\varepsilon_1 \varepsilon_2] \mid [\varepsilon_3],\ [\varepsilon_1 \varepsilon_3],\ [\varepsilon_2 \varepsilon_3],\ [\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3] \mid$$
$$[\varepsilon_4],\ [\varepsilon_1 \varepsilon_4],\ [\varepsilon_2 \varepsilon_4],\ [\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_4],\ [\varepsilon_3 \varepsilon_4],\ [\varepsilon_1 \varepsilon_3 \varepsilon_4],\ [\varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4],\ [\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4]$$

in die sogenannte natürliche Reihenfolge:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

bringen, bei der speciell den sechs ungeraden Charakteristiken die Stellenzahlen:

$$7,\quad 8,\quad 10,\quad 12,\quad 14,\quad 15$$

zukommen. Bezeichnet man dann eine jede der sechzehn Normalcharakteristiken mit der ihr bei dieser Anordnung entsprechenden Stellenzahl, so kann man aus der hier folgenden Tabelle zu je zwei Charakteristiken die ihrer Summe congruente Normalcharakteristik finden. Die Tabelle ist nämlich dadurch entstanden, dass allgemein in das der μ^{ten} Horizontalreihe und ν^{ten} Vertikalreihe gemeinsam angehörende Quadrat die Stellenzahl derjenigen Charakteristik aufgenommen wurde, welche der Summe der beiden, den Stellenzahlen μ und ν entsprechenden Charakteristiken congruent ist.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2	1	4	3	6	5	8	7	10	9	12	11	14	13	16	15
3	4	1	2	7	8	5	6	11	12	9	10	15	16	13	14
4	3	2	1	8	7	6	5	12	11	10	9	16	15	14	13
5	6	7	8	1	2	3	4	13	14	15	16	9	10	11	12
6	5	8	7	2	1	4	3	14	13	16	15	10	9	12	11
7	8	5	6	3	4	1	2	15	16	13	14	11	12	9	10
8	7	6	5	4	3	2	1	16	15	14	13	12	11	10	9
9	10	11	12	13	14	15	16	1	2	3	4	5	6	7	8
10	9	12	11	14	13	16	15	2	1	4	3	6	5	8	7
11	12	9	10	15	16	13	14	3	4	1	2	7	8	5	6
12	11	10	9	16	15	14	13	4	3	2	1	8	7	6	5
13	14	15	16	9	10	11	12	5	6	7	8	1	2	3	4
14	13	16	15	10	9	12	11	6	5	8	7	2	1	4	3
15	16	13	14	11	12	9	10	7	8	5	6	3	4	1	2
16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

3.

Zu den beiden schon früher eingeführten Symbolen:

$$(-1)^{|\varepsilon|} = (-1)^{\varepsilon_1\varepsilon_1' + \varepsilon_2\varepsilon_2'}, \quad (-1)^{|\varepsilon|\,|\eta|} = (-1)^{\varepsilon_1\eta_1' + \varepsilon_1'\eta_1 + \varepsilon_2\eta_2' + \varepsilon_2'\eta_2}$$

soll noch ein drittes, später zur Verwendung kommendes, definirt durch die Gleichung:

$$(-1)^{(\varepsilon)(\eta)'} = (-1)^{\varepsilon_1\eta_1' + \varepsilon_2\eta_2'},$$

eingeführt werden, das ebenso wie die beiden anderen sich auf zwei beliebige Charakteristiken $[\varepsilon]$, $[\eta]$ bezieht. Diese drei Symbole gehorchen zunächst, wie unmittelbar aus ihrer Definition hervorgeht, den folgenden Gesetzen:

$$(-1)^{|\varepsilon|\,|\varepsilon|} = +1, \quad (-1)^{|\varepsilon|\,|\eta|} = (-1)^{|\eta|\,|\varepsilon|}, \quad (-1)^{|\varepsilon|\,|0|} = +1,$$

$$(-1)^{|\varepsilon|\,|\eta|} = (-1)^{|\varepsilon|} \cdot (-1)^{|\eta|} (-1)^{|\varepsilon\eta|},$$

$$(-1)^{|\varepsilon\zeta|\,|\eta\vartheta|} = (-1)^{|\varepsilon|\,|\eta|} \cdot (-1)^{|\varepsilon|\,|\vartheta|} \cdot (-1)^{|\zeta|\,|\eta|} \cdot (-1)^{|\zeta|\,|\vartheta|},$$

$$(-1)^{(\varepsilon)(\varepsilon)'} = (-1)^{|\varepsilon|}, \; (-1)^{(\varepsilon)(\eta)'} . (-1)^{(\eta)(\varepsilon)'} = (-1)^{|\varepsilon|\,|\eta|}, \; (-1)^{(\varepsilon)(0)'} = +1, \; (-1)^{(0)(\varepsilon)'} = +1,$$

$$(-1)^{(\varepsilon\zeta)(\eta\vartheta)'} = (-1)^{(\varepsilon)(\eta)'} \cdot (-1)^{(\varepsilon)(\vartheta)'} \cdot (-1)^{(\zeta)(\eta)'} \cdot (-1)^{(\zeta)(\vartheta)'},$$

wobei es nicht unwichtig ist, zu bemerken, dass der Werth der definirten Symbole ungeändert bleibt, wenn man an Stelle der Charakteristiken, auf die sie sich beziehen,

irgend welche denselben congruente setzt. Der einfacheren Schreibweise wegen sollen im Folgenden bei allen Symbolen vom Typus $(-1)^{|\varepsilon|\,|\eta|}$ die eckigen Klammern unterdrückt werden, sodass also z. B. $(-1)^{\varepsilon\,|\,\eta}$ an Stelle von $(-1)^{|\varepsilon|\,|\eta|}$, $(-1)^{\varepsilon\zeta\,|\,\eta\vartheta}$ an Stelle von $(-1)^{|\varepsilon\zeta|\,|\eta\vartheta|}$ tritt.

In Bezug auf die Symbole von der Form $(-1)^{\varepsilon\,|\,\eta}$ gilt nun zunächst der folgende

Satz I. *Lässt man in dem Symbole $(-1)^{\varepsilon\,|\,\eta}$, in welchem $[\eta]$ eine beliebige von $[0]$ verschiedene Charakteristik bezeichnen soll, an Stelle von $[\varepsilon]$ der Reihe nach die sämmtlichen sechzehn Normalcharakteristiken treten, so haben acht der so entstehenden Symbole den Werth $+1$, acht den Werth -1, oder, was dasselbe, es ist immer* $\sum\limits_{[\varepsilon]}(-1)^{\varepsilon\,|\,\eta} = 0.$

Zum Beweise dieses Satzes berücksichtige man, dass:

$$\sum_{[\varepsilon]}(-1)^{\varepsilon\,|\,\eta} = (-1)^{|\eta|}\sum_{[\varepsilon]}(-1)^{|\varepsilon|}\cdot(-1)^{|\varepsilon\eta|}$$
$$= (-1)^{|\eta|}\left\{\sum_{i=1}^{i=6}(-1)^{|\omega_i|}\cdot(-1)^{|\omega_i\eta|} + \sum_{i=1}^{i=10}(-1)^{|\bar\omega_i|}\cdot(-1)^{|\bar\omega_i\eta|}\right\}$$

ist, wenn mit $[\omega_1], \ldots, [\omega_6]$ die sechs ungeraden, mit $[\bar\omega_1], \ldots, [\bar\omega_{10}]$ die zehn geraden Normalcharakteristiken, in beliebiger Reihenfolge, bezeichnet werden. Nun ist aber immer $(-1)^{|\omega_i|} = -1$, $(-1)^{|\bar\omega_i|} = +1$ und daher nach Satz 8. des Art. 2.:

$$\sum_{i=1}^{i=6}(-1)^{|\omega_i|}\cdot(-1)^{|\omega_i\eta|} = -\sum_{i=1}^{i=6}(-1)^{|\omega_i\eta|} = -(4-2) = -2,$$
$$\sum_{i=1}^{i=10}(-1)^{|\bar\omega_i|}\cdot(-1)^{|\bar\omega_i\eta|} = +\sum_{i=1}^{i=10}(-1)^{|\bar\omega_i\eta|} = +(6-4) = +2,$$

folglich, wie zu beweisen war:

$$\sum_{[\varepsilon]}(-1)^{\varepsilon\,|\,\eta} = 0.$$

Mit Hülfe dieses Satzes erkennt man leicht die Richtigkeit von

Satz II. *Jedes der vier folgenden Systeme von je zwei Gleichungen:*

1. $(-1)^{\varepsilon\,|\,\eta} = +1,\ (-1)^{\varepsilon\,|\,\zeta} = +1,$ 2. $(-1)^{\varepsilon\,|\,\eta} = +1,\ (-1)^{\varepsilon\,|\,\zeta} = -1,$
3. $(-1)^{\varepsilon\,|\,\eta} = -1,\ (-1)^{\varepsilon\,|\,\zeta} = +1,$ 4. $(-1)^{\varepsilon\,|\,\eta} = -1,\ (-1)^{\varepsilon\,|\,\zeta} = -1,$

bei denen $[\eta]$, $[\zeta]$ zwei beliebige von einander und von $[0]$ verschiedene feste Charakteristiken bezeichnen, wird immer durch vier und nur durch vier Normalcharakteristiken $[\varepsilon]$, welche die Lösungen des Systems genannt werden sollen, erfüllt.

Da nämlich eine jede der sechzehn Normalcharakteristiken zu einem der vier Systeme als Lösung gehören muss, und jedes der drei Symbole $(-1)^{\varepsilon\,|\,\eta}$, $(-1)^{\varepsilon\,|\,\zeta}$, $(-1)^{\varepsilon\,|\,\eta\zeta}$, wenn für $[\varepsilon]$ der Reihe nach die sechzehn Normalcharakteristiken eintreten, achtmal den Werth $+1$, achtmal den Werth -1 annimmt, ferner auch jede Lösung

von 1. und jede Lösung von 4. dem Symbole $(-1)^{\varepsilon|\eta\zeta} = (-1)^{\varepsilon|\eta} \cdot (-1)^{\varepsilon|\zeta}$ den Werth $+1$, jede Lösung von 2. und jede Lösung von 3. dagegen demselben den Werth -1 verleiht, so ergeben sich, wenn man mit n_1, n_2, n_3, n_4 die Anzahl der Lösungen der Systeme 1., 2., 3., 4. beziehlich bezeichnet, die Gleichungen:

$$n_1 + n_2 = n_3 + n_4 = 8\,,$$
$$n_1 + n_3 = n_2 + n_4 = 8\,,$$
$$n_1 + n_4 = n_2 + n_3 = 8\,,$$

woraus, wie im Satze behauptet,

$$n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 4$$

folgt.

Bezeichnen ferner wiederum $[\omega_1], \ldots, [\omega_6]$ die sechs ungeraden Charakteristiken in beliebiger Reihenfolge, so gelten folgende vier im Späteren wiederholt zur Anwendung kommende Relationen:

Zunächst besteht, da stets $(-1)^{|\omega_\nu|} = -1$ ist, die Gleichung:

(1) $$(-1)^{\omega_1|\omega_2} = (-1)^{|\omega_1|} \cdot (-1)^{|\omega_2|}\, (-1)^{|\omega_1\omega_2|} = (-1)^{|\omega_1\omega_2|}.$$

Nach Satz 5. des Art. 2. ist weiter für je drei ungerade Charakteristiken $[\omega_\lambda]$, $[\omega_\mu]$, $[\omega_\nu]$ stets $(-1)^{|\omega_\lambda\omega_\mu\omega_\nu|} = +1$, folglich:

$$(-1)^{\omega_1\omega_2|\omega_3\omega_4} = (-1)^{\omega_1|\omega_3\omega_4} \cdot (-1)^{\omega_2|\omega_3\omega_4}$$
$$= (-1)^{|\omega_1|} \cdot (-1)^{|\omega_3\omega_4|} \cdot (-1)^{|\omega_1\omega_3\omega_4|} \cdot (-1)^{|\omega_2|} \cdot (-1)^{|\omega_3\omega_4|} \cdot (-1)^{|\omega_2\omega_3\omega_4|} = +1\,.$$

Da aber ferner mit Rücksicht auf (1) auch:

$$(-1)^{\omega_1\omega_2|\omega_3\omega_4} = (-1)^{|\omega_1\omega_2|} \cdot (-1)^{|\omega_3\omega_4|} \cdot (-1)^{|\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4|} = (-1)^{\omega_1|\omega_2} \cdot (-1)^{\omega_3|\omega_4} \cdot (-1)^{\omega_5|\omega_6}$$

ist, so folgt durch Verbindung der beiden Gleichungen die Relation:

(2) $$(-1)^{\omega_1\omega_2|\omega_3\omega_4} = (-1)^{\omega_1|\omega_2} \cdot (-1)^{\omega_3|\omega_4} \cdot (-1)^{\omega_5|\omega_6} = +1\,.$$

Auf dieselbe Weise gelangt man durch Verbindung der beiden Gleichungen:

$$(-1)^{\omega_1\omega_2|\omega_1\omega_3} = (-1)^{\omega_1|\omega_1\omega_3} \cdot (-1)^{\omega_2|\omega_1\omega_3}$$
$$= (-1)^{|\omega_1|} \cdot (-1)^{|\omega_1\omega_3|} \cdot (-1)^{|\omega_3|} \cdot (-1)^{|\omega_2|} \cdot (-1)^{|\omega_1\omega_3|} \cdot (-1)^{|\omega_1\omega_2\omega_3|} = -1\,,$$

$$(-1)^{\omega_1\omega_2|\omega_1\omega_3} = (-1)^{|\omega_1\omega_2|} \cdot (-1)^{|\omega_1\omega_3|} \cdot (-1)^{|\omega_2\omega_3|} = (-1)^{\omega_1|\omega_2} \cdot (-1)^{\omega_1|\omega_3} \cdot (-1)^{\omega_2|\omega_3}$$

zu der weiteren Relation:

(3) $$(-1)^{\omega_1\omega_2|\omega_1\omega_3} = (-1)^{\omega_1|\omega_2} \cdot (-1)^{\omega_2|\omega_3} \cdot (-1)^{\omega_3|\omega_1} = -1\,.$$

Endlich ergibt sich noch aus der Beziehung:

$$(-1)^{\omega_1|\omega_2} \cdot (-1)^{\omega_2|\omega_3} \cdot (-1)^{\omega_3|\omega_4} \cdot (-1)^{\omega_4|\omega_1} = (-1)^{\omega_1|\omega_2\omega_4} \cdot (-1)^{\omega_3|\omega_2\omega_4} = (-1)^{\omega_1\omega_3|\omega_2\omega_4},$$

indem man die Gleichung (2) berücksichtigt, die Relation:

(4) $$(-1)^{\omega_1|\omega_2} \cdot (-1)^{\omega_2|\omega_3} \cdot (-1)^{\omega_3|\omega_4} \cdot (-1)^{\omega_4|\omega_1} = +1\,.$$

4.

Geht man jetzt auf die in Art. 1. unter (8) aufgestellte *Riemann*'sche Fundamentalformel zurück und setzt darin zur Abkürzung:

$$\vartheta[\eta]((2u'))\,\vartheta[\eta+\varrho]((2v'))\,\vartheta[\eta+\sigma]((2w'))\,\vartheta[\eta-\varrho-\sigma]((2t')) = x'_{|\eta|}\,,$$
$$\vartheta[\varepsilon]((2u))\,\vartheta[\varepsilon+\varrho]((2v))\,\vartheta[\varepsilon+\sigma]((2w))\,\vartheta[\varepsilon-\varrho-\sigma]((2t)) = x_{|\varepsilon|}\,,$$

so nimmt dieselbe die Gestalt:

$$(F)\qquad 4x'_{|\eta|} = \sum_{|\varepsilon|}(-1)^{\varepsilon\,\eta}\,x_{|\varepsilon|}$$

an. Lässt man in dieser Gleichung an Stelle von $[\eta]$ der Reihe nach die sämmtlichen sechzehn Normalcharakteristiken treten und denkt sich jedesmal die auf der rechten Seite stehende Summation ausgeführt, so erhält man ein System von sechzehn Gleichungen, denen man auf folgende Weise eine übersichtlichere Gestalt geben kann.

Man bezeichne allgemein die auf irgend eine bestimmte Charakteristik $[\eta]$ bezogene Grösse $x'_{|\eta|}$ mit x'_μ, wenn μ die der Charakteristik $[\eta]$ in der natürlichen Reihenfolge zukommende Stellenzahl ist, in gleicher Weise die auf irgend eine Charakteristik $[\varepsilon]$ bezogene Grösse $x_{|\varepsilon|}$ mit x_ν, wenn ν die Stellenzahl der Charakteristik $[\varepsilon]$ ist. Dadurch nehmen die erwähnten sechzehn Gleichungen die folgende Gestalt an:

$$(S)\quad\begin{aligned}
4x'_1 &= +x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9+x_{10}+x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}+x_{16},\\
4x'_2 &= +x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8-x_9-x_{10}-x_{11}-x_{12}-x_{13}-x_{14}-x_{15}-x_{16},\\
4x'_3 &= +x_1+x_2+x_3+x_4-x_5-x_6-x_7-x_8+x_9+x_{10}+x_{11}+x_{12}-x_{13}-x_{14}-x_{15}-x_{16},\\
4x'_4 &= +x_1+x_2+x_3+x_4-x_5-x_6-x_7-x_8-x_9-x_{10}-x_{11}-x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}+x_{16},\\
4x'_5 &= +x_1+x_2-x_3-x_4+x_5+x_6-x_7-x_8+x_9+x_{10}-x_{11}-x_{12}+x_{13}+x_{14}-x_{15}-x_{16},\\
4x'_6 &= +x_1+x_2-x_3-x_4+x_5+x_6-x_7-x_8-x_9-x_{10}+x_{11}+x_{12}-x_{13}-x_{14}+x_{15}+x_{16},\\
4x'_7 &= +x_1+x_2-x_3-x_4-x_5-x_6+x_7+x_8+x_9+x_{10}-x_{11}-x_{12}-x_{13}-x_{14}+x_{15}+x_{16},\\
4x'_8 &= +x_1+x_2-x_3-x_4-x_5-x_6+x_7+x_8-x_9-x_{10}+x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}-x_{15}-x_{16},\\
4x'_9 &= +x_1-x_2+x_3-x_4+x_5-x_6+x_7-x_8+x_9-x_{10}+x_{11}-x_{12}+x_{13}-x_{14}+x_{15}-x_{16},\\
4x'_{10} &= +x_1-x_2+x_3-x_4+x_5-x_6+x_7-x_8-x_9+x_{10}-x_{11}+x_{12}-x_{13}+x_{14}-x_{15}+x_{16},\\
4x'_{11} &= +x_1-x_2+x_3-x_4-x_5+x_6-x_7+x_8+x_9-x_{10}+x_{11}-x_{12}-x_{13}+x_{14}-x_{15}+x_{16},\\
4x'_{12} &= +x_1-x_2+x_3-x_4-x_5+x_6-x_7+x_8-x_9+x_{10}-x_{11}+x_{12}+x_{13}-x_{14}+x_{15}-x_{16},\\
4x'_{13} &= +x_1-x_2-x_3+x_4+x_5-x_6-x_7+x_8+x_9-x_{10}-x_{11}+x_{12}+x_{13}-x_{14}-x_{15}+x_{16},\\
4x'_{14} &= +x_1-x_2-x_3+x_4+x_5-x_6-x_7+x_8-x_9+x_{10}+x_{11}-x_{12}-x_{13}+x_{14}+x_{15}-x_{16},\\
4x'_{15} &= +x_1-x_2-x_3+x_4-x_5+x_6+x_7-x_8+x_9-x_{10}-x_{11}+x_{12}-x_{13}+x_{14}+x_{15}-x_{16},\\
4x'_{16} &= +x_1-x_2-x_3+x_4-x_5+x_6+x_7-x_8-x_9+x_{10}+x_{11}-x_{12}+x_{13}-x_{14}-x_{15}+x_{16}.
\end{aligned}$$

Im Folgenden soll das System dieser sechzehn Gleichungen auf Grund der allgemeinen Gleichung (F) genauer untersucht werden, indem man, ganz abgesehen davon, welche Bedeutung die x, x' ursprünglich haben, unter den x, x' Grössen versteht, welche

nur diesen sechzehn Gleichungen zu genügen haben, sonst aber keinerlei Bedingungen unterworfen sind. Dabei soll es der Uebersichtlichkeit wegen gestattet sein, dieselbe Grösse $x'_{|\eta|}$ auch durch $x'_{|\zeta|}$, $x'_{|\vartheta|}$, ... zu bezeichnen, wenn nur die Charakteristiken $[\zeta], [\vartheta]$, ... der Normalcharakteristik $[\eta]$ congruent sind; dasselbe soll für die Grössen $x_{|\varepsilon|}$ gelten. Diese Annahme verträgt sich auch mit der urprünglichen Definition der Grössen x', x, da in Folge der Relationen (3), (4) des Art. 1. sowohl das mit $x'_{|\eta|}$, als auch das mit $x_{|\varepsilon|}$ bezeichnete ϑ-Product ungeändert bleibt, wenn man an Stelle der Charakteristik $[\eta]$, beziehlich $[\varepsilon]$, eine ihr congruente Charakteristik setzt. Da ferner auch, wie schon früher erwähnt, das Symbol $(-1)^{\varepsilon|\eta}$ seinen Werth nicht ändert, wenn $[\varepsilon], [\eta]$ durch irgend welche ihnen congruente Charakteristiken ersetzt werden, so können bei der erwähnten Untersuchung congruente Charakteristiken einander vertreten. Mit Rücksicht darauf sollen im Folgenden unter „verschiedenen" Charakteristiken nur solche verstanden werden, welche einander nicht congruent sind.

5.

Nach den gemachten Voraussetzungen gilt jetzt die Gleichung:

$$(F) \qquad 4x'_{|\eta|} = \sum_{|\varepsilon|} (-1)^{\varepsilon|\eta} x_{|\varepsilon|}$$

für jede beliebige Charakteristik $[\eta]$. Vermehrt man nun in dieser Gleichung $[\eta]$ der Reihe nach um $[\alpha], [\beta], [\alpha\beta]$, unter $[\alpha], [\beta]$ zwei beliebige, von einander und von $[0]$ verschiedene Charakteristiken verstanden, multiplicirt auch die dadurch aus (F) entstehenden drei Gleichungen beziehlich mit $(-1)^{\alpha|\zeta}$, $(-1)^{\beta|\zeta}$, $(-1)^{\alpha\beta|\zeta}$, unter $[\zeta]$ eine ganz beliebige Charakteristik verstanden, und addirt sie zu der ursprünglichen Gleichung (F), so erhält man zunächst die Gleichung:

$$\begin{aligned} 4\Big(x'_{|\eta|} + (-1)^{\alpha|\zeta} x'_{|\eta\alpha|} + (-1)^{\beta|\zeta} x'_{|\eta\beta|} + (-1)^{\alpha\beta|\zeta} x'_{|\eta\alpha\beta|}\Big) \\ = \sum_{|\varepsilon|} (-1)^{\varepsilon|\eta} \Big(1 + (-1)^{\alpha|\zeta\varepsilon} + (-1)^{\beta|\zeta\varepsilon} + (-1)^{\alpha\beta|\zeta\varepsilon}\Big) x_{|\varepsilon|} \\ = \sum_{|\varepsilon|} (-1)^{\varepsilon|\eta} \Big[1 + (-1)^{\alpha|\zeta\varepsilon}\Big] \Big[1 + (-1)^{\beta|\zeta\varepsilon}\Big] x_{|\varepsilon|}. \end{aligned}$$

Das auf der rechten Seite dieser Gleichung stehende Product $\Big[1 + (-1)^{\alpha|\zeta\varepsilon}\Big]\Big[1 + (-1)^{\beta|\zeta\varepsilon}\Big]$ kann für irgend eine Charakteristik $[\varepsilon]$ nur den Werth 0 oder den Werth 4 haben. Für das Eintreten des letzteren Falles sind die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen:

$$(-1)^{\alpha|\zeta\varepsilon} = +1, \qquad (-1)^{\beta|\zeta\varepsilon} = +1.$$

Nun existiren aber nach Satz II. des Art. 3. zu zwei beliebig gewählten, von einander und von $[0]$ verschiedenen Charakteristiken $[\alpha], [\beta]$ immer vier und nur vier verschiedene Charakteristiken $[\xi]$, welche den Gleichungen $(-1)^{\alpha|\xi} = +1$, $(-1)^{\beta|\xi} = +1$ genügen;

eine derselben ist immer die Charakteristik [0], bezeichnet man dann zwei beliebige der drei übrigen mit [γ], [δ], so ist die vierte nothwendig [$\gamma\delta$]. Daraus folgt aber, dass die Gleichungen $(-1)^{\alpha|\zeta\varepsilon} = +1$, $(-1)^{\beta|\zeta\varepsilon} = +1$ gleichfalls vier und nur vier verschiedene Lösungen [ε] besitzen, und dass [ε] = [ζ], [$\zeta\gamma$], [$\zeta\delta$], [$\zeta\gamma\delta$] diese vier Lösungen sind. Auf der rechten Seite der obigen Gleichung bleiben daher nur diejenigen vier Glieder stehen, welche diesen vier Charakteristiken entsprechen, während die zwölf übrigen Glieder verschwinden, und es nimmt daher, wenn noch links und rechts mit 4 dividirt wird, diese Gleichung die Form:

$$(F') \qquad x'_{[\eta]} + (-1)^{\alpha|\zeta} x'_{[\eta\alpha]} + (-1)^{\beta|\zeta} x'_{[\eta\beta]} + (-1)^{\alpha\beta|\zeta} x'_{[\eta\alpha\beta]}$$
$$= (-1)^{\zeta|\eta} \left(x_{[\zeta]} + (-1)^{\gamma|\eta} x_{[\zeta\gamma]} + (-1)^{\delta|\eta} x_{[\zeta\delta]} + (-1)^{\gamma\delta|\eta} x_{[\zeta\gamma\delta]} \right)$$

an, in welcher also, wie nochmals bemerkt werden mag, [η], [ζ] zwei ganz beliebige Charakteristiken bezeichnen, die auch einander gleich sein können, [α], [β] zwei von einander und von [0] verschiedene Charakteristiken, endlich [γ], [δ] zwei beliebige der drei von [0] verschiedenen Lösungen [ξ] der Gleichungen $(-1)^{\alpha|\xi} = +1$, $(-1)^{\beta|\xi} = +1$. Man kann daher mit Rücksicht auf die Gleichung (F') [γ] und [δ] auch definiren als zwei von einander und von [0] verschiedene Charakteristiken, welche den Bedingungen:

$$(f') \quad (-1)^{\alpha|\gamma} = +1,\ (-1)^{\beta|\gamma} = +1, \qquad (-1)^{\alpha|\delta} = +1,\ (-1)^{\beta|\delta} = +1$$

genügen.

Die Aufgabe der folgenden Artikel wird es sein, zu untersuchen, wie viele verschiedene Gleichungen aus (F') durch Einführung specieller Charakteriken erhalten werden können, dieselben aufzustellen und in Gruppen zu ordnen. Doch sei schon hier darauf aufmerksam gemacht, dass zwei Charakteristiken [α_1], [β_1], an Stelle von [α], [β] in (F') eingeführt, dieselbe Gleichung hervorbringen wie zwei andere [α_2], [β_2], wenn nur die drei Charakteristiken [α_1], [β_1], [$\alpha_1\beta_1$], abgesehen von der Reihenfolge, mit den drei Charakteristiken [α_2], [β_2], [$\alpha_2\beta_2$] übereinstimmen. Aehnliches gilt in Bezug auf die Charakteristiken [γ], [δ].

6.

Um einen Ueberblick über die Gesammtheit der Gleichungen zu gewinnen, die aus (F') durch Einführung specieller Charakteristiken entstehen, empfiehlt es sich in Bezug auf [α], [β] die beiden möglichen Fälle:

$$\text{(I)} \quad (-1)^{\alpha|\beta} = +1, \qquad\qquad \text{(II)} \quad (-1)^{\alpha|\beta} = -1$$

zu unterscheiden. Der erste Fall soll zunächst behandelt werden.

Erster Fall:

$$(-1)^{\alpha|\beta} = +1.$$

Ist $(-1)^{\alpha|\beta} = +1$, so ist sowohl [ξ] = [α], wie [ξ] = [β] eine Lösung der Gleichungen $(-1)^{\alpha|\xi} = +1$, $(-1)^{\beta|\xi} = +1$, und es werden daher auch die

Gleichungen (Γ') erfüllt, wenn man für $[\gamma]$ die Charakteristik $[\alpha]$, für $[\delta]$ die Charakteristik $[\beta]$ setzt. Geschieht dies, so nimmt die Gleichung (F') die Form an:

$$
(F_1) \qquad x'_{[\eta]} + (-1)^{\alpha|\zeta} x'_{[\eta\alpha]} + (-1)^{\beta|\zeta} x'_{[\eta\beta]} + (-1)^{\alpha\beta|\zeta} x'_{[\eta\alpha\beta]}
$$
$$
= (-1)^{\zeta|\eta}\left(x_{[\zeta]} + (-1)^{\alpha|\eta} x_{[\zeta\alpha]} + (-1)^{\beta|\eta} x_{[\zeta\beta]} + (-1)^{\alpha\beta|\eta} x_{[\zeta\alpha\beta]}\right).
$$

In dieser Gleichung kann man jetzt zunächst an Stelle von jeder der beliebigen Charakteristiken $[\eta]$, $[\zeta]$ der Reihe nach die sechzehn verschiedenen Charakteristiken setzen. Von den so entstehenden 16×16 Gleichungen sind aber nur 16 wesentlich verschieden. Um dies einzusehen, berücksichtige man zunächst, dass die Gleichung (F_1) wieder in sich selbst übergeht, sowohl, wenn man $[\eta]$, wie, wenn man $[\zeta]$ um $[\alpha]$, $[\beta]$ oder $[\alpha\beta]$ vermehrt. Man theile dann weiter die sämmtlichen sechzehn Charakteristiken $[\varepsilon]$ nach ihrem Verhalten gegenüber den Charakteristiken $[\alpha]$, $[\beta]$ auf folgende Weise in vier Gruppen ein:

zur ersten Gruppe nehme man die vier Lösungen $[\varepsilon]$ der Gleichungen $(-1)^{\alpha|\varepsilon} = +1$, $(-1)^{\beta|\varepsilon} = +1$; es sind dies die Charakteristiken:

$$[0], \qquad [\alpha], \qquad [\beta], \qquad [\alpha\beta];$$

zur zweiten Gruppe nehme man die vier Lösungen $[\varepsilon]$ der Gleichungen $(-1)^{\alpha|\varepsilon} = +1$, $(-1)^{\beta|\varepsilon} = -1$; es sind dies die Charakteristiken:

$$[\varkappa], \qquad [\varkappa\alpha], \qquad [\varkappa\beta], \qquad [\varkappa\alpha\beta],$$

wenn mit $[\varkappa]$ eine beliebige der vier Lösungen bezeichnet wird;

zur dritten Gruppe nehme man die vier Lösungen $[\varepsilon]$ der Gleichungen $(-1)^{\alpha|\varepsilon} = -1$, $(-1)^{\beta|\varepsilon} = +1$; es sind dies die Charakteristiken:

$$[\lambda], \qquad [\lambda\alpha], \qquad [\lambda\beta], \qquad [\lambda\alpha\beta],$$

wenn mit $[\lambda]$ eine beliebige der vier Lösungen bezeichnet wird;

zur vierten Gruppe endlich nehme man die vier Lösungen $[\varepsilon]$ der Gleichungen $(-1)^{\alpha|\varepsilon} = -1$, $(-1)^{\beta|\varepsilon} = -1$, es sind dies, wie aus dem Vorigen folgt, die Charakteristiken:

$$[\varkappa\lambda], \qquad [\varkappa\lambda\alpha], \qquad [\varkappa\lambda\beta], \qquad [\varkappa\lambda\alpha\beta].$$

Mit Rücksicht auf das vorher Gesagte erkennt man nun, dass immer die vier Charakteristiken einer dieser Gruppen der Reihe nach in (F_1) an Stelle von $[\eta]$ oder $[\zeta]$ gesetzt, dieselbe Gleichung hervorbringen, und dass daher die obige allgemeine Formel (F_1) nur sechzehn verschiedene specielle umfasst, welche aus ihr entstehen, indem man für jede der beiden Charakteristiken $[\eta]$, $[\zeta]$, unabhängig von der anderen, der Reihe nach die Charakteristiken:

$$[0], \qquad [\varkappa], \qquad [\lambda], \qquad [\varkappa\lambda]$$

eintreten lässt. Die Charakteristik $[\lambda]$ bezeichnet dabei, wie schon oben bemerkt, eine beliebige der vier Lösungen der Gleichungen $(-1)^{\alpha|\lambda} = -1$, $(-1)^{\beta|\lambda} = +1$. Ist eine bestimmte derselben mit $[\lambda']$ bezeichnet, so ist $[\beta\lambda']$ ebenfalls eine Lösung. Da nun $(-1)^{\varkappa|\beta\lambda'} = (-1)^{\varkappa|\beta} . (-1)^{\varkappa|\lambda'} = -(-1)^{\varkappa|\lambda'}$ ist, so folgt, dass man für $[\lambda]$ immer eine solche der vier zulässigen Charakteristiken wählen kann, für welche $(-1)^{\varkappa|\lambda} = +1$

ist. Geschieht dies, so lassen sich die sechzehn in (F_1) bei festgehaltenen Charakteristiken $[\alpha]$, $[\beta]$, $[\varkappa]$, $[\lambda]$ enthaltenen Gleichungen, wenn man zugleich $x_{[\varepsilon]}$ einfach mit (ε), $x'_{[\varepsilon]}$ mit $(\varepsilon)'$ bezeichnet, wie folgt schreiben:

$$
(S_1)\quad
\begin{array}{l}
(0)' + (\alpha)' + (\beta)' + (\alpha\beta)' = (0) + (\alpha) + (\beta) + (\alpha\beta),\\
(0)' + (\alpha)' - (\beta)' - (\alpha\beta)' = (\varkappa) + (\varkappa\alpha) + (\varkappa\beta) + (\varkappa\alpha\beta),\\
(0)' - (\alpha)' + (\beta)' - (\alpha\beta)' = (\lambda) + (\lambda\alpha) + (\lambda\beta) + (\lambda\alpha\beta),\\
(0)' - (\alpha)' - (\beta)' + (\alpha\beta)' = (\varkappa\lambda) + (\varkappa\lambda\alpha) + (\varkappa\lambda\beta) + (\varkappa\lambda\alpha\beta),\\
\hline
(\varkappa)' + (\varkappa\alpha)' + (\varkappa\beta)' + (\varkappa\alpha\beta)' = (0) + (\alpha) - (\beta) - (\alpha\beta),\\
(\varkappa)' + (\varkappa\alpha)' - (\varkappa\beta)' - (\varkappa\alpha\beta)' = (\varkappa) + (\varkappa\alpha) - (\varkappa\beta) - (\varkappa\alpha\beta),\\
(\varkappa)' - (\varkappa\alpha)' + (\varkappa\beta)' - (\varkappa\alpha\beta)' = (\lambda) + (\lambda\alpha) - (\lambda\beta) - (\lambda\alpha\beta),\\
(\varkappa)' - (\varkappa\alpha)' - (\varkappa\beta)' + (\varkappa\alpha\beta)' = (\varkappa\lambda) + (\varkappa\lambda\alpha) - (\varkappa\lambda\beta) - (\varkappa\lambda\alpha\beta),\\
\hline
(\lambda)' + (\lambda\alpha)' + (\lambda\beta)' + (\lambda\alpha\beta)' = (0) - (\alpha) + (\beta) - (\alpha\beta),\\
(\lambda)' + (\lambda\alpha)' - (\lambda\beta)' - (\lambda\alpha\beta)' = (\varkappa) - (\varkappa\alpha) + (\varkappa\beta) - (\varkappa\alpha\beta),\\
(\lambda)' - (\lambda\alpha)' + (\lambda\beta)' - (\lambda\alpha\beta)' = (\lambda) - (\lambda\alpha) + (\lambda\beta) - (\lambda\alpha\beta),\\
(\lambda)' - (\lambda\alpha)' - (\lambda\beta)' + (\lambda\alpha\beta)' = (\varkappa\lambda) - (\varkappa\lambda\alpha) + (\varkappa\lambda\beta) - (\varkappa\lambda\alpha\beta),\\
\hline
(\varkappa\lambda)' + (\varkappa\lambda\alpha)' + (\varkappa\lambda\beta)' + (\varkappa\lambda\alpha\beta)' = (0) - (\alpha) - (\beta) + (\alpha\beta),\\
(\varkappa\lambda)' + (\varkappa\lambda\alpha)' - (\varkappa\lambda\beta)' - (\varkappa\lambda\alpha\beta)' = (\varkappa) - (\varkappa\alpha) - (\varkappa\beta) + (\varkappa\alpha\beta),\\
(\varkappa\lambda)' - (\varkappa\lambda\alpha)' + (\varkappa\lambda\beta)' - (\varkappa\lambda\alpha\beta)' = (\lambda) - (\lambda\alpha) - (\lambda\beta) + (\lambda\alpha\beta),\\
(\varkappa\lambda)' - (\varkappa\lambda\alpha)' - (\varkappa\lambda\beta)' + (\varkappa\lambda\alpha\beta)' = (\varkappa\lambda) - (\varkappa\lambda\alpha) - (\varkappa\lambda\beta) + (\varkappa\lambda\alpha\beta).
\end{array}
$$

Das so entstandene System (S_1) kann das ursprüngliche System (S), aus dem es abgeleitet wurde, in jeder Beziehung ersetzen, insofern als man von dem Systeme (S_1) aus, durch passende Verbindung der ihm angehörigen Gleichungen, rückwärts wieder das ursprüngliche System (S) erhalten kann.

Die in (S_1) vorkommenden Charakteristiken $[\alpha]$, $[\beta]$, $[\varkappa]$, $[\lambda]$ sind nur den Bedingungen:

$$
(s_1)\quad
\begin{array}{ll}
(-1)^{\alpha|\beta} = +1, & (-1)^{\varkappa|\lambda} = +1,\\
(-1)^{\alpha|\varkappa} = +1,\ (-1)^{\beta|\varkappa} = -1, & (-1)^{\alpha|\lambda} = -1,\ (-1)^{\beta|\lambda} = +1
\end{array}
$$

unterworfen; man kann daher für dieselben irgend vier Charakteristiken eintreten lassen, welche den Gleichungen (s_1) genügen. Berücksichtigt man aber, dass bei festgehaltenen Charakteristiken $[\alpha]$, $[\beta]$, zwar $[\varkappa]$, $[\lambda]$ auf mehrere Weisen bestimmt werden können, dass jedoch, wie aus der vorhergehenden Entwicklung unmittelbar ersichtlich, durch irgend eine andere zulässige Bestimmung der Charakteristiken $[\varkappa]$, $[\lambda]$ jede Gleichung des Systems (S_1) in sich selbst übergeht, das System (S_1) selbst also ungeändert bleibt, berücksichtigt ferner, dass übereinstimmend mit dem schon früher bei der Formel (F'') Bemerkten, die Formel (F_1) und desshalb auch das aus ihr abgeleitete System (S_1)

sich reproducirt, wenn man an Stelle von zwei bestimmten Charakteristiken $[\alpha_1]$, $[\beta_1]$ zwei andere $[\alpha_2]$, $[\beta_2]$ treten lässt, derart, dass $[\alpha_2]$, $[\beta_2]$, $[\alpha_2\beta_2]$, abgesehen von der Reihenfolge mit $[\alpha_1]$, $[\beta_1]$, $[\alpha_1\beta_1]$ übereinstimmen, so folgt, dass alle möglichen verschiedenen Systeme (S_1), und zwar jedes nur einmal, erhalten werden, wenn man an Stelle von $[\alpha]$, $[\beta]$ alle möglichen Combinationen der fünfzehn von $[0]$ verschiedenen Charakteristiken, welche der Bedingung $(-1)^{\alpha|\beta} = +1$ genügen und zudem wesentlich verschiedene Systeme $[\alpha]$, $[\beta]$, $[\alpha\beta]$ liefern, setzt und jedesmal dazu $[\varkappa]$, $[\lambda]$ auf irgend eine der möglichen Weisen so bestimmt, dass die Gleichungen (s_1) erfüllt sind.

Wie viele von einander verschiedene Systeme auf diese Weise aus (S_1) entstehen, soll jetzt untersucht werden. Zu dem Ende bezeichne man mit $[\omega_1], \ldots, [\omega_6]$ die sechs ungeraden Charakteristiken in ihrer natürlichen Reihenfolge; nach Satz 3. des Art. 2. lässt sich dann jede der fünfzehn von $[0]$ verschiedenen Charakteristiken immer und nur auf eine Weise in zwei, immer verschiedene, ungerade Charakteristiken zerlegen, und es können daher zwei beliebige dieser fünfzehn Charakteristiken durch $[\omega_\mu\omega_\nu]$, $[\omega_{\mu'}\omega_{\nu'}]$ repräsentirt werden, wenn μ, ν und μ', ν' zwei passend gewählte, verschiedene Combinationen der Zahlen $1, \ldots, 6$ zur zweiten Classe ohne Wiederholung bezeichnen. Zwei solche Charakteristiken $[\omega_\mu\omega_\nu]$, $[\omega_{\mu'}\omega_{\nu'}]$ dürfen aber nur dann an Stelle von $[\alpha]$, $[\beta]$ gesetzt werden, wenn sie, entsprechend der Bedingung $(-1)^{\alpha|\beta} = +1$, die Gleichung $(-1)^{\omega_\mu\omega_\nu|\omega_{\mu'}\omega_{\nu'}} = +1$ erfüllen, und da dies, wie die Relationen (2), (3) am Schlusse des Art. 3. zeigen, immer und nur dann stattfindet, wenn die Zahlenpaare μ, ν und μ', ν', keine Zahl gemeinschaftlich haben, so folgt, dass die Bedingung $(-1)^{\alpha|\beta} = +1$ in allgemeinster Weise erfüllt wird, wenn man:

$$[\alpha] \equiv [\omega_\mu\omega_\nu], \qquad [\beta] \equiv [\omega_{\mu'}\omega_{\nu'}]$$

setzt, unter μ, ν, μ', ν' vier verschiedene Zahlen aus der Reihe $1, \ldots, 6$ verstanden. Bezeichnet man ferner mit μ'', ν'' die beiden noch übrigen, von μ, ν, μ', ν' verschiedenen Zahlen aus der Reihe $1, \ldots, 6$ und setzt:

$$[\varkappa] \equiv [\omega_{\mu'}\omega_{\mu''}], \qquad [\lambda] \equiv [\omega_\mu\omega_{\nu''}],$$

so genügen diese Charakteristiken $[\varkappa]$, $[\lambda]$ zusammen mit den oben angeführten Charakteristiken $[\alpha]$, $[\beta]$ den sämmtlichen sechs Gleichungen (s_1). Entsprechend den gemachten Festsetzungen ist jetzt:

$$[\alpha] \equiv [\omega_\mu\omega_\nu], \qquad [\beta] \equiv [\omega_{\mu'}\omega_{\nu'}], \qquad [\alpha\beta] \equiv [\omega_{\mu''}\omega_{\nu''}],$$

und man erhält mit Rücksicht auf das früher in Bezug auf $[\alpha]$, $[\beta]$ Bemerkte, sämmtliche specielle Charakteristiken $[\alpha]$, $[\beta]$, die verschiedene Systeme (S_1) erzeugen, wenn man die sechs ungeraden Charakteristiken auf die fünfzehn möglichen Weisen in drei Paare theilt, für jedes Paar die Summe der beiden in ihm enthaltenen Charakteristiken bildet und die so entstehenden Summen nach Belieben mit $[\alpha]$, $[\beta]$, $[\alpha\beta]$ bezeichnet. Dies liefert die fünfzehn folgenden Systeme $[\alpha]$, $[\beta]$, $[\alpha\beta]$:

1. $[\alpha] \equiv [\omega_1\omega_2]$, $[\beta] \equiv [\omega_3\omega_4]$, $[\alpha\beta] \equiv [\omega_5\omega_6]$;
2. $[\alpha] \equiv [\omega_1\omega_2]$, $[\beta] \equiv [\omega_3\omega_5]$, $[\alpha\beta] \equiv [\omega_4\omega_6]$;

3. $[\alpha] \equiv [\omega_1 \omega_2]$, $[\beta] \equiv [\omega_3 \omega_6]$, $[\alpha\beta] \equiv [\omega_4 \omega_5]$;
4. $[\alpha] \equiv [\omega_1 \omega_3]$, $[\beta] \equiv [\omega_2 \omega_4]$, $[\alpha\beta] \equiv [\omega_5 \omega_6]$;
5. $[\alpha] \equiv [\omega_1 \omega_3]$, $[\beta] \equiv [\omega_2 \omega_5]$, $[\alpha\beta] \equiv [\omega_4 \omega_6]$;
6. $[\alpha] \equiv [\omega_1 \omega_3]$, $[\beta] \equiv [\omega_2 \omega_6]$, $[\alpha\beta] \equiv [\omega_4 \omega_5]$;
7. $[\alpha] \equiv [\omega_1 \omega_4]$, $[\beta] \equiv [\omega_2 \omega_3]$, $[\alpha\beta] \equiv [\omega_5 \omega_6]$;
8. $[\alpha] \equiv [\omega_1 \omega_4]$, $[\beta] \equiv [\omega_2 \omega_5]$, $[\alpha\beta] \equiv [\omega_3 \omega_6]$;
9. $[\alpha] \equiv [\omega_1 \omega_4]$, $[\beta] \equiv [\omega_2 \omega_6]$, $[\alpha\beta] \equiv [\omega_3 \omega_5]$;
10. $[\alpha] \equiv [\omega_1 \omega_5]$, $[\beta] \equiv [\omega_2 \omega_3]$, $[\alpha\beta] \equiv [\omega_4 \omega_6]$;
11. $[\alpha] \equiv [\omega_1 \omega_5]$, $[\beta] \equiv [\omega_2 \omega_4]$, $[\alpha\beta] \equiv [\omega_3 \omega_6]$;
12. $[\alpha] \equiv [\omega_1 \omega_5]$, $[\beta] \equiv [\omega_2 \omega_6]$, $[\alpha\beta] \equiv [\omega_3 \omega_4]$;
13. $[\alpha] \equiv [\omega_1 \omega_6]$, $[\beta] \equiv [\omega_2 \omega_3]$, $[\alpha\beta] \equiv [\omega_4 \omega_5]$;
14. $[\alpha] \equiv [\omega_1 \omega_6]$, $[\beta] \equiv [\omega_2 \omega_4]$, $[\alpha\beta] \equiv [\omega_3 \omega_5]$;
15. $[\alpha] \equiv [\omega_1 \omega_6]$, $[\beta] \equiv [\omega_2 \omega_5]$, $[\alpha\beta] \equiv [\omega_3 \omega_4]$.

Bestimmt man zu jedem dieser fünfzehn Paare $[\alpha]$, $[\beta]$ die zugehörigen Charakteristiken $[\varkappa]$, $[\lambda]$ in der oben angegebenen Weise und führt die so bestimmten Charakteristiken $[\alpha]$, $[\beta]$, $[\varkappa]$, $[\lambda]$ jedesmal in (S_1) ein, so erhält man die fünfzehn in (S_1) enthaltenen Systeme von je sechzehn Gleichungen. Um dieselben zu fixiren, berücksichtige man, dass in (S_1) allgemein (ε) die Grösse $x_{[\varepsilon]}$, $(\varepsilon)'$ die Grösse $x'_{[\varepsilon]}$ vertritt, ferner, dass nach dem früher getroffenen Uebereinkommen $x_{[\varepsilon]}$ auch durch x_ν, $x'_{[\varepsilon]}$ auch durch x'_ν bezeichnet werden kann, wenn ν die der Charakteristik $[\varepsilon]$ in der natürlichen Reihenfolge zukommende Stellenzahl ist. Denkt man sich nun die Gleichungen zunächst unter Anwendung von x_ν, x'_ν angeschrieben und ersetzt dann x_ν einfach durch ν, x'_ν durch ν', so entsteht die Tabelle I., in welcher die Gleichungen in der Weise zusammengestellt sind, dass die sechzehn ein System bildenden Gleichungen jedesmal in vier Horizontalreihen zusammenstehen. Um jedes Missverständniss auszuschliessen, wird also nochmals bemerkt, dass die in der Tabelle vorkommenden nicht accentuirten Zahlen $1, \ldots, 16$ die Grössen $x_1, \ldots, x_{16}$, die accentuirten Zahlen $1', \ldots, 16'$ die Grössen $x'_1, \ldots, x'_{16}$ beziehlich vertreten, während in der früheren Tabelle am Schlusse des Art. 2. die Zahlen $1, \ldots, 16$ die sechzehn Charakteristiken in ihrer natürlichen Reihenfolge repräsentiren. Die in der Tabelle durch Horizontalstriche ausgezeichneten Zahlen 7, 8, 10, 12, 14, 15 entsprechen, als Stellenzahlen aufgefasst, den sechs ungeraden Charakteristiken.

7.

Nachdem so der erste Fall, wo die beiden Charakteristiken $[\alpha]$, $[\beta]$ der Bedingung $(-1)^{\alpha|\beta} = +1$ genügen, erledigt ist, soll jetzt der zweite Fall, wo $(-1)^{\alpha|\beta} = -1$ ist, behandelt werden.

Zweiter Fall:

$$(-1)^{\alpha|\beta} = -1.$$

Ist $(-1)^{\alpha|\beta} = -1$, so sind die in (F) vorkommenden Charakteristiken $[\gamma]$, $[\delta]$, welche mit $[\alpha]$, $[\beta]$ durch die Gleichungen:

$$(f') \quad (-1)^{\alpha|\gamma} = +1, \; (-1)^{\beta|\gamma} = +1, \qquad (-1)^{\alpha|\delta} = +1, \; (-1)^{\beta|\delta} = +1$$

verknüpft sind, nothwendig von jeder der Charakteristiken $[\alpha]$, $[\beta]$, $[\alpha\beta]$ verschieden, und es hat daher für diese Untersuchung die Formel:

$$(F_2) \qquad x'_{[\eta]} + (-1)^{\alpha|\zeta} x'_{[\eta\alpha]} + (-1)^{\beta|\zeta} x'_{[\eta\beta]} + (-1)^{\alpha\beta|\zeta} x'_{[\eta\alpha\beta]}$$
$$= (-1)^{\zeta|\eta}\left(x_{[\zeta]} + (-1)^{\gamma|\eta} x_{[\zeta\gamma]} + (-1)^{\delta|\eta} x_{[\zeta\delta]} + (-1)^{\gamma\delta|\eta} x_{[\zeta\gamma\delta]}\right)$$

als Ausgangspunct zu dienen, die zwar der Gestalt nach mit (F'') übereinstimmt, sich aber von ihr dadurch unterscheidet, dass $[\alpha]$, $[\beta]$ nunmehr der Bedingung $(-1)^{\alpha|\beta} = -1$ unterworfen sind. Für $[\gamma]$, $[\delta]$ sind hier zwei beliebige der drei von $[0]$ verschiedenen Lösungen der Gleichungen $(-1)^{\alpha|\xi} = +1$, $(-1)^{\beta|\xi} = +1$ zu wählen; sind zwei derselben mit $[\gamma]$ und $[\delta]$ bezeichnet, so ist die dritte nothwendig $[\gamma\delta]$, sodass eine Aenderung in der Wahl von $[\gamma]$ und $[\delta]$ keine Aenderung der Formel (F_2) nach sich zieht, diese vielmehr vollständig bestimmt erscheint, sobald $[\alpha]$ und $[\beta]$, der Bedingung $(-1)^{\alpha|\beta} = -1$ entsprechend, gewählt sind. Es sei hier noch erwähnt, dass aus den Gleichungen (f') nothwendig $(-1)^{\gamma|\delta} = -1$ folgt, da, wenn $(-1)^{\gamma|\delta} = +1$ wäre, die Gleichungen $(-1)^{\gamma|\xi} = +1$, $(-1)^{\delta|\xi} = +1$ ausser den Lösungen $[\xi] = [0]$, $[\alpha]$, $[\beta]$, $[\alpha\beta]$ noch die Lösungen $[\xi] = [\gamma]$, $[\delta]$, $[\gamma\delta]$, also mehr als vier Lösungen hätten, was nach Satz II. des Art. 3. unmöglich ist.

In der Gleichung (F_2) kann man jetzt zunächst an Stelle von jeder der beiden beliebigen Charakteristiken $[\eta]$, $[\zeta]$ der Reihe nach die sechzehn verschiedenen Charakteristiken setzen. Von den so entstehenden 16×16 Gleichungen sind aber nur 16 wesentlich verschieden. Um dies einzusehen, berücksichtige man zunächst, dass die Gleichung (F_2) wieder in sich selbst übergeht, sowohl, wenn man $[\eta]$ um $[\alpha]$ oder $[\beta]$ oder $[\alpha\beta]$, als auch, wenn man $[\zeta]$ um $[\gamma]$ oder $[\delta]$ oder $[\gamma\delta]$ vermehrt. Theilt man daher die sämmtlichen sechzehn Charakteristiken das eine Mal in die vier Gruppen:

$$\begin{array}{llll}
[0], & [\alpha], & [\beta], & [\alpha\beta]; \\
[\gamma], & [\gamma\alpha], & [\gamma\beta], & [\gamma\alpha\beta]; \\
[\delta], & [\delta\alpha], & [\delta\beta], & [\delta\alpha\beta]; \\
[\gamma\delta], & [\gamma\delta\alpha], & [\gamma\delta\beta], & [\gamma\delta\alpha\beta];
\end{array}$$

das andere Mal in die vier Gruppen:

$$\begin{array}{llll}
[0], & [\gamma], & [\delta], & [\gamma\delta]; \\
[\alpha], & [\alpha\gamma], & [\alpha\delta], & [\alpha\gamma\delta]; \\
[\beta], & [\beta\gamma], & [\beta\delta], & [\beta\gamma\delta]; \\
[\alpha\beta], & [\alpha\beta\gamma], & [\alpha\beta\delta], & [\alpha\beta\gamma\delta];
\end{array}$$

ein, so erkennt man, dass immer dieselbe Gleichung hervorgebracht wird, sowohl, wenn

man an Stelle der Charakteristik $[\eta]$ der Reihe nach die vier Charakteristiken einer der vier ersten Gruppen, als auch, wenn man an Stelle von $[\zeta]$ der Reihe nach die vier Charakteristiken einer der vier letzten Gruppen setzt. Die obige allgemeine Formel (F_2) umfasst daher nur sechzehn specielle Gleichungen, welche aus ihr entstehen, indem man unabhängig von einander für $[\eta]$ der Reihe nach die Charakteristiken:

$$[0], \qquad [\gamma], \qquad [\delta], \qquad [\gamma\delta],$$

für $[\zeta]$ der Reihe nach die Charakteristiken:

$$[0], \qquad [\alpha], \qquad [\beta], \qquad [\alpha\beta],$$

setzt. Berücksichtigt man noch, dass, wie die Gleichungen (f') zeigen, der in der Gleichung (F_2) rechts stehende Factor $(-1)^{\eta|\zeta}$ unter diesen Voraussetzungen immer den Werth $+1$ hat, so lassen sich die sechzehn in (F_2) bei festgehaltenen Charakteristiken $[\alpha]$, $[\beta]$, $[\gamma]$, $[\delta]$ enthaltenen speciellen Gleichungen, wenn man zugleich $x_{[\varepsilon]}$ einfach mit (ε), $x'_{[\varepsilon]}$ mit $(\varepsilon)'$ bezeichnet, wie folgt schreiben:

$$(S_2) \quad \begin{array}{l}
(0)' + (\alpha)' + (\beta)' + (\alpha\beta)' = (0) + (\gamma) + (\delta) + (\gamma\delta), \\
(0)' + (\alpha)' - (\beta)' - (\alpha\beta)' = (\alpha) + (\alpha\gamma) + (\alpha\delta) + (\alpha\gamma\delta), \\
(0)' - (\alpha)' + (\beta)' - (\alpha\beta)' = (\beta) + (\beta\gamma) + (\beta\delta) + (\beta\gamma\delta), \\
(0)' - (\alpha)' - (\beta)' + (\alpha\beta)' = (\alpha\beta) + (\alpha\beta\gamma) + (\alpha\beta\delta) + (\alpha\beta\gamma\delta), \\
\hline
(\gamma)' + (\gamma\alpha)' + (\gamma\beta)' + (\gamma\alpha\beta)' = (0) + (\gamma) - (\delta) - (\gamma\delta), \\
(\gamma)' + (\gamma\alpha)' - (\gamma\beta)' - (\gamma\alpha\beta)' = (\alpha) + (\alpha\gamma) - (\alpha\delta) - (\alpha\gamma\delta), \\
(\gamma)' - (\gamma\alpha)' + (\gamma\beta)' - (\gamma\alpha\beta)' = (\beta) + (\beta\gamma) - (\beta\delta) - (\beta\gamma\delta), \\
(\gamma)' - (\gamma\alpha)' - (\gamma\beta)' + (\gamma\alpha\beta)' = (\alpha\beta) + (\alpha\beta\gamma) - (\alpha\beta\delta) - (\alpha\beta\gamma\delta), \\
\hline
(\delta)' + (\delta\alpha)' + (\delta\beta)' + (\delta\alpha\beta)' = (0) - (\gamma) + (\delta) - (\gamma\delta), \\
(\delta)' + (\delta\alpha)' - (\delta\beta)' - (\delta\alpha\beta)' = (\alpha) - (\alpha\gamma) + (\alpha\delta) - (\alpha\gamma\delta), \\
(\delta)' - (\delta\alpha)' + (\delta\beta)' - (\delta\alpha\beta)' = (\beta) - (\beta\gamma) + (\beta\delta) - (\beta\gamma\delta), \\
(\delta)' - (\delta\alpha)' - (\delta\beta)' + (\delta\alpha\beta)' = (\alpha\beta) - (\alpha\beta\gamma) + (\alpha\beta\delta) - (\alpha\beta\gamma\delta), \\
\hline
(\gamma\delta)' + (\gamma\delta\alpha)' + (\gamma\delta\beta)' + (\gamma\delta\alpha\beta)' = (0) - (\gamma) - (\delta) + (\gamma\delta), \\
(\gamma\delta)' + (\gamma\delta\alpha)' - (\gamma\delta\beta)' - (\gamma\delta\alpha\beta)' = (\alpha) - (\alpha\gamma) - (\alpha\delta) + (\alpha\gamma\delta), \\
(\gamma\delta)' - (\gamma\delta\alpha)' + (\gamma\delta\beta)' - (\gamma\delta\alpha\beta)' = (\beta) - (\beta\gamma) - (\beta\delta) + (\beta\gamma\delta), \\
(\gamma\delta)' - (\gamma\delta\alpha)' - (\gamma\delta\beta)' + (\gamma\delta\alpha\beta)' = (\alpha\beta) - (\alpha\beta\gamma) - (\alpha\beta\delta) + (\alpha\beta\gamma\delta).
\end{array}$$

Das so entstandene System (S_2) kann das ursprüngliche System (S), aus dem es abgeleitet wurde, in jeder Beziehung ersetzen, insofern als man von dem Systeme (S_2) aus, durch passende Verbindung der ihm angehörigen Gleichungen, rückwärts wieder das ursprüngliche System (S) erhalten kann.

Die in (S_2) vorkommenden Charakteristiken $[\alpha]$, $[\beta]$, $[\gamma]$, $[\delta]$ sind nur den Bedingungen:

$$(s_2)\qquad \begin{array}{cc} (-1)^{\alpha|\beta} = -1\,, & (-1)^{\gamma|\delta} = -1\,, \\ (-1)^{\alpha|\gamma} = +1\,,\ (-1)^{\beta|\gamma} = +1\,, & (-1)^{\alpha|\delta} = +1\,,\ (-1)^{\beta|\delta} = +1 \end{array}$$

unterworfen; man kann daher für dieselben irgend vier Charakteristiken eintreten lassen, welche diesen Bedingungen genügen. Berücksichtigt man aber, dass bei festgehaltenen Charakteristiken $[\alpha]$, $[\beta]$ zwar $[\gamma]$, $[\delta]$ auf drei Weisen bestimmt werden können, dass jedoch, wie früher bemerkt, eine Aenderung in der Bestimmung von $[\gamma]$ und $[\delta]$ keine Aenderung der Formel (F_2) und daher auch, abgesehen von der Reihenfolge der Gleichungen und der Summanden innerhalb derselben, keine Aenderung in dem daraus abgeleiteten Systeme (S_2) hervorruft, berücksichtigt ferner, dass, übereinstimmend mit dem schon früher bei der Formel (F'') Bemerkten, die Formel (F_2) und desshalb auch das aus ihr abgeleitete System (S_2) sich reproducirt, wenn man an Stelle von zwei bestimmten Charakteristiken $[\alpha_1]$, $[\beta_1]$ zwei andere $[\alpha_2]$, $[\beta_2]$ treten lässt, derart, dass $[\alpha_2]$, $[\beta_2]$, $[\alpha_2\beta_2]$ abgesehen von der Reihenfolge mit $[\alpha_1]$, $[\beta_1]$, $[\alpha_1\beta_1]$ übereinstimmen, so folgt, dass alle möglichen verschiedenen Systeme (S_2), und zwar jedes nur einmal, erhalten werden, wenn man an Stelle von $[\alpha]$, $[\beta]$ alle möglichen Combinationen der fünfzehn von $[0]$ verschiedenen Charakteristiken, welche der Bedingung $(-1)^{\alpha|\beta} = -1$ genügen und zudem wesentlich verschiedene Systeme $[\alpha]$, $[\beta]$, $[\alpha\beta]$ liefern, setzt und jedesmal dazu $[\gamma]$, $[\delta]$ auf eine der drei möglichen Weisen so bestimmt, dass die Gleichungen (s_2) erfüllt sind.

Wie viele von einander verschiedene Systeme auf diese Weise aus (S_2) entstehen, soll jetzt untersucht werden. Zu dem Ende bezeichne man mit $[\omega_1], \ldots, [\omega_6]$ die sechs ungeraden Charakteristiken in ihrer natürlichen Reihenfolge; nach Satz 3. des Art. 2. lässt sich dann jede der fünfzehn von $[0]$ verschiedenen Charakteristiken immer und nur auf eine Weise in zwei, immer verschiedene, ungerade Charakteristiken zerlegen, und es können daher zwei beliebige dieser fünfzehn Charakteristiken durch $[\omega_\mu \omega_\nu]$, $[\omega_{\mu'} \omega_{\nu'}]$ repräsentirt werden, wenn μ, ν und μ', ν' zwei passend gewählte verschiedene Combinationen der Zahlen $1, \ldots, 6$ zur zweiten Classe ohne Wiederholung bezeichnen. Zwei solche Charakteristiken $[\omega_\mu \omega_\nu]$, $[\omega_{\mu'} \omega_{\nu'}]$ dürfen aber nur dann an Stelle von $[\alpha]$, $[\beta]$ gesetzt werden, wenn sie, entsprechend der Bedingung $(-1)^{\alpha|\beta} = -1$, die Gleichung $(-1)^{\omega_\mu\omega_\nu|\omega_{\mu'}\omega_{\nu'}} = -1$ erfüllen, und da dies, wie die Relationen (2), (3) des Art. 3. zeigen, immer und nur dann stattfindet, wenn die Zahlenpaare μ, ν und μ', ν' eine Zahl gemeinschaftlich haben, so folgt, dass die Bedingung $(-1)^{\alpha|\beta} = -1$ in allgemeinster Weise erfüllt wird, wenn man:

$$[\alpha] \equiv [\omega_\varrho \omega_\sigma]\,, \qquad [\beta] \equiv [\omega_\varrho \omega_\tau]$$

setzt, unter ϱ, σ, τ irgend drei verschiedene Zahlen aus der Reihe $1, \ldots, 6$ verstanden. Bezeichnet man ferner mit ϱ', σ', τ' die drei übrigen, von ϱ, σ, τ verschiedenen Zahlen aus der Reihe $1, \ldots, 6$ und setzt:

$$[\gamma] \equiv [\omega_{\varrho'} \omega_{\sigma'}]\,, \qquad [\delta] \equiv [\omega_{\varrho'} \omega_{\tau'}]\,,$$

so genügen diese Charakteristiken $[\gamma]$, $[\delta]$ zusammen mit den oben angeführten Charak-

teristiken $[\alpha], [\beta]$ den sämmtlichen sechs Gleichungen (s_2). Entsprechend den gemachten Festsetzungen ist jetzt:

$$[\alpha] \equiv [\omega_\varrho \omega_\sigma], \qquad [\beta] \equiv [\omega_\varrho \omega_\tau], \qquad [\alpha\beta] \equiv [\omega_\sigma \omega_\tau],$$

und man erhält, mit Rücksicht auf das früher in Bezug auf $[\alpha]$, $[\beta]$ Bemerkte, sämmtliche specielle Charakteristiken $[\alpha]$, $[\beta]$, welche verschiedene Systeme (S_2) erzeugen, wenn man aus den sechs ungeraden Charakteristiken auf die zwanzig möglichen Weisen drei herausgreift, aus solchen drei dann jedesmal die drei möglichen Summen zu je zweien bildet und dieselben in beliebiger Reihenfolge mit $[\alpha]$, $[\beta]$, $[\alpha\beta]$ bezeichnet. Dies liefert die folgenden zwanzig Systeme $[\alpha]$, $[\beta]$, $[\alpha\beta]$:

1. $[\alpha] \equiv [\omega_1\omega_2]$, $[\beta] \equiv [\omega_1\omega_3]$, $[\alpha\beta] \equiv [\omega_2\omega_3]$;
2. $[\alpha] \equiv [\omega_4\omega_5]$, $[\beta] \equiv [\omega_4\omega_6]$, $[\alpha\beta] \equiv [\omega_5\omega_6]$;
3. $[\alpha] \equiv [\omega_1\omega_2]$, $[\beta] \equiv [\omega_1\omega_4]$, $[\alpha\beta] \equiv [\omega_2\omega_4]$;
4. $[\alpha] \equiv [\omega_3\omega_5]$, $[\beta] \equiv [\omega_3\omega_6]$, $[\alpha\beta] \equiv [\omega_5\omega_6]$;
5. $[\alpha] \equiv [\omega_1\omega_2]$, $[\beta] \equiv [\omega_1\omega_5]$, $[\alpha\beta] \equiv [\omega_2\omega_5]$;
6. $[\alpha] \equiv [\omega_3\omega_4]$, $[\beta] \equiv [\omega_3\omega_6]$, $[\alpha\beta] \equiv [\omega_4\omega_6]$;
7. $[\alpha] \equiv [\omega_1\omega_2]$, $[\beta] \equiv [\omega_1\omega_6]$, $[\alpha\beta] \equiv [\omega_2\omega_6]$;
8. $[\alpha] \equiv [\omega_3\omega_4]$, $[\beta] \equiv [\omega_3\omega_5]$, $[\alpha\beta] \equiv [\omega_4\omega_5]$;
9. $[\alpha] \equiv [\omega_1\omega_3]$, $[\beta] \equiv [\omega_1\omega_4]$, $[\alpha\beta] \equiv [\omega_3\omega_4]$;
10. $[\alpha] \equiv [\omega_2\omega_5]$, $[\beta] \equiv [\omega_2\omega_6]$, $[\alpha\beta] \equiv [\omega_5\omega_6]$;
11. $[\alpha] \equiv [\omega_1\omega_3]$, $[\beta] \equiv [\omega_1\omega_5]$, $[\alpha\beta] \equiv [\omega_3\omega_5]$;
12. $[\alpha] \equiv [\omega_2\omega_4]$, $[\beta] \equiv [\omega_2\omega_6]$, $[\alpha\beta] \equiv [\omega_4\omega_6]$;
13. $[\alpha] \equiv [\omega_1\omega_3]$, $[\beta] \equiv [\omega_1\omega_6]$, $[\alpha\beta] \equiv [\omega_3\omega_6]$;
14. $[\alpha] \equiv [\omega_2\omega_4]$, $[\beta] \equiv [\omega_2\omega_5]$, $[\alpha\beta] \equiv [\omega_4\omega_5]$;
15. $[\alpha] \equiv [\omega_1\omega_4]$, $[\beta] \equiv [\omega_1\omega_5]$, $[\alpha\beta] \equiv [\omega_4\omega_5]$;
16. $[\alpha] \equiv [\omega_2\omega_3]$, $[\beta] \equiv [\omega_2\omega_6]$, $[\alpha\beta] \equiv [\omega_3\omega_6]$;
17. $[\alpha] \equiv [\omega_1\omega_4]$, $[\beta] \equiv [\omega_1\omega_6]$, $[\alpha\beta] \equiv [\omega_4\omega_6]$;
18. $[\alpha] \equiv [\omega_2\omega_3]$, $[\beta] \equiv [\omega_2\omega_5]$, $[\alpha\beta] \equiv [\omega_3\omega_5]$;
19. $[\alpha] \equiv [\omega_1\omega_5]$, $[\beta] \equiv [\omega_1\omega_6]$, $[\alpha\beta] \equiv [\omega_5\omega_6]$;
20. $[\alpha] \equiv [\omega_2\omega_3]$, $[\beta] \equiv [\omega_2\omega_4]$, $[\alpha\beta] \equiv [\omega_3\omega_4]$.

Bestimmt man zu jedem dieser zwanzig Paare $[\alpha]$, $[\beta]$ die zugehörigen Charakteristiken $[\gamma]$, $[\delta]$ in der oben angegebenen Weise und führt die so bestimmten Charakteristiken $[\alpha]$, $[\beta]$, $[\gamma]$, $[\delta]$ jedesmal in (S_2) ein, so erhält man die zwanzig in (S_2) enthaltenen Systeme von je sechzehn Gleichungen. Um dieselben zu fixiren berücksichtige man, dass in (S_2) allgemein (ε) die Grösse $x_{[\varepsilon]}$, $(\varepsilon)'$ die Grösse $x'_{[\varepsilon]}$ vertritt, ferner, dass nach dem früher getroffenen Uebereinkommen $x_{[\varepsilon]}$ auch durch x_ε, $x'_{[\varepsilon]}$ durch x'_ε bezeichnet

werden kann, wenn ν die der Charakteristik $[\varepsilon]$ in der natürlichen Reihenfolge zukommende Stellenzahl ist. Denkt man sich nun die Gleichungen zunächst unter Anwendung von x_ν, x'_ν angeschrieben und ersetzt dann x_ν einfach durch ν, x'_ν durch ν', so entsteht die Tabelle II., in welcher die Gleichungen in der Weise zusammengestellt sind, dass die sechzehn ein System bildenden Gleichungen jedesmal in vier Horizontalreihen zusammenstehen. Um jedes Missverständniss auszuschliessen, wird also nochmals bemerkt, dass die in der Tabelle vorkommenden nicht accentuirten Zahlen $1, \ldots, 16$ die Grössen $x_1, \ldots, x_{16}$, die accentuirten Zahlen $1', \ldots, 16'$ die Grössen $x'_1, \ldots, x'_{16}$ vertreten, während in der früheren Tabelle am Schlusse des Art. 2. die Zahlen $1, \ldots, 16$ die sechzehn Charakteristiken in ihrer natürlichen Reihenfolge repräsentiren. Die in der Tabelle durch Horizontalstriche ausgezeichneten Zahlen 7, 8, 10, 12, 14, 15 entsprechen, als Stellenzahlen aufgefasst, den sechs ungeraden Charakteristiken.

8.

Im Anschlusse an das Vorige sollen jetzt noch einige Eigenschaften der in den Tabellen enthaltenen Gleichungen hervorgehoben werden.

Beachtet man, dass in den Tabellen, wie vorher erwähnt, die Zahl ν die Grösse $x_{[\varepsilon]}$, die Zahl ν' die Grösse $x'_{[\varepsilon]}$ vertritt, wenn ν die Stellenzahl der Charakteristik $[\varepsilon]$ ist, so kann man sagen, dass in den Tabellen I., II. auf den linken wie rechten Seiten Systeme von je vier verschiedenen Charakteristiken auftreten, deren Summe immer der $[0]$ congruent ist, und von denen daher jedes in die Form $[\eta]$, $[\eta\alpha]$, $[\eta\beta]$, $[\eta\alpha\beta]$ gebracht werden kann, wenn mit $[\eta]$ eine beliebige der vier Charakteristiken desselben bezeichnet wird. Definirt man nun als Vierersystem jedes System von vier Charakteristiken, deren Summe congruent $[0]$ ist, so erkennt man, dass es im Ganzen einhundertvierzig verschiedene Vierersysteme gibt, und da, wie eine einfache Abzählung zeigt, diese Anzahl mit der Anzahl der in den Tabellen I., II. vorkommenden verschiedenen Vierersysteme übereinstimmt, so folgt, das jedes mögliche Vierersystem in den Tabellen sich findet. Da ferner, auf welche der vierundzwanzig möglichen Weisen auch ein Vierersystem in die Form $[\eta]$, $[\eta\alpha]$, $[\eta\beta]$, $[\eta\alpha\beta]$ gebracht werden mag, der Ausdruck $(-1)^{\alpha|\beta}$ für dasselbe Vierersystem immer denselben Werth $+1$ oder -1 besitzt, so kann man die sämmtlichen Vierersysteme in zwei Arten eintheilen, indem man zur ersten Art alle diejenigen nimmt, für welche $(-1)^{\alpha|\beta} = +1$, zur zweiten Art alle diejenigen, für welche $(-1)^{\alpha|\beta} = -1$ ist. Berücksichtigt man dann, dass vier verschiedene ungerade Charakteristiken niemals eine der $[0]$ congruente Summe haben können, dass also ein Vierersystem nie aus vier ungeraden Charakteristiken gebildet werden kann, so zeigt die Relation:

$$(-1)^{|\eta|}(-1)^{|\eta\alpha|}(-1)^{|\eta\beta|}(-1)^{|\eta\alpha\beta|} = (-1)^{\alpha|\beta},$$

dass ein Vierersystem erster Art entweder vier gerade oder zwei gerade und zwei ungerade Charakteristiken enthält, ein Vierersystem zweiter Art dagegen entweder aus einer geraden und drei ungeraden oder aus einer ungeraden und drei geraden Charakteristiken besteht. Man erkennt endlich mit Rücksicht auf die in den beiden vorigen

Artikeln entwickelte Theorie, dass die Tabelle I. die sämmtlichen sechzig Vierersysteme erster Art, aber keines zweiter Art, die Tabelle II. die sämmtlichen achtzig Vierersysteme zweiter Art, aber keines erster Art enthält.

Bezeichnen jetzt wieder $[\omega_1], \ldots, [\omega_6]$ die sechs ungeraden Charakteristiken in der natürlichen Reihenfolge, so lassen sich die vier Charakteristiken $[\eta]$, $[\eta\alpha]$, $[\eta\beta]$, $[\eta\alpha\beta]$ eines Vierersystems erster Art, für welches also $(-1)^{\alpha|\beta} = +1$ ist, immer in die Form:

$$[\eta], \qquad [\eta\omega_\mu\omega_\nu], \qquad [\eta\omega_{\mu'}\omega_{\nu'}], \qquad [\eta\omega_{\mu''}\omega_{\nu''}]$$

bringen, wobei μ, ν, μ', ν', μ'', ν'' eine Permutation der Zahlen $1, \ldots, 6$ bezeichnet. Ersetzt man hierin $[\eta]$ durch $[\zeta\omega_\mu\omega_{\mu'}]$, so gehen die obigen vier Charakteristiken in die neuen:

$$[\zeta\omega_\mu\omega_{\mu'}], \qquad [\zeta\omega_\nu\omega_{\mu'}], \qquad [\zeta\omega_\mu\omega_{\nu'}], \qquad [\zeta\omega_\nu\omega_{\nu'}]$$

über, und man erkennt unmittelbar, dass diese vier Charakteristiken, welche Charakteristik auch an Stelle von $[\zeta]$ gesetzt wird, und wie man auch die vier Zahlen μ, ν, μ', ν' aus den Zahlen $1, \ldots, 6$ auswählen mag, immer ein Vierersystem erster Art bilden.

Die vier Charakteristiken $[\eta]$, $[\eta\alpha]$, $[\eta\beta]$, $[\eta\alpha\beta]$ eines Vierersystems zweiter Art, für welches also $(-1)^{\alpha|\beta} = -1$ ist, lassen sich entsprechend immer in die Form:

$$[\eta], \qquad [\eta\omega_\varrho\omega_\sigma], \qquad [\eta\omega_\varrho\omega_\tau], \qquad [\eta\omega_\sigma\omega_\tau]$$

bringen, wobei ϱ, σ, τ drei verschiedene Zahlen aus der Reihe $1, \ldots, 6$ bezeichnen. Ersetzt man hierin $[\eta]$ durch $[\zeta\omega_\varrho]$, so gehen die obigen vier Charakteristiken in die neuen:

$$[\zeta\omega_\varrho], \qquad [\zeta\omega_\sigma], \qquad [\zeta\omega_\tau], \qquad [\zeta\omega_\varrho\omega_\sigma\omega_\tau]$$

über, und es ist auch hier unmittelbar klar, dass diese vier Charakteristiken, welche Charakterisik auch an Stelle von $[\zeta]$ gesetzt wird, und wie man auch die drei Zahlen ϱ, σ, τ aus den Zahlen $1, \ldots, 6$ auswählen mag, immer ein Vierersystem zweiter Art bilden.

Das System (S), aus welchem sämmtliche Gleichungen der Tabellen I., II. abgeleitet wurden, ist ein involutorisches. Es ist daher gestattet, sowohl bei ihm selbst als bei allen auf Grund desselben abgeleiteten Relationen die Grössen x mit den Grössen x' beziehlich zu vertauschen. Führt man diese Vertauschung bei den Gleichungen der Tabellen I., II. aus, so zeigt sich ein weiterer wesentlicher Unterschied zwischen den der ersten und den der zweiten Tabelle angehörigen Systemen von je sechzehn Gleichungen. Durch den erwähnten Process geht nämlich jedes der fünfzehn Systeme der Tabelle I., abgesehen von der Anordnung der Gleichungen, wieder in sich selbst über, während in der Tabelle II. die zwanzig Systeme paarweise in einander übergehen.

9.

Bei den bisherigen Untersuchungen bezeichneten die x, x' Grössen, welche nur den sechzehn Gleichungen des Systems (S) zu genügen hatten, im Uebrigen aber ganz beliebig waren. Im Folgenden soll jetzt das System (S) unter der Voraussetzung untersucht werden, dass zwischen den x solche Beziehungen bestehen, dass die den sechs ungeraden Charakteristiken entsprechenden Linearformen $4x'_7$, $4x'_8$, $4x'_{10}$, $4x'_{12}$, $4x'_{14}$, $4x'_{15}$ den Werth Null haben. Genügen die Grössen x diesen Bedingungen, ist also:

$$x'_7 = 0,\quad x'_8 = 0,\quad x'_{10} = 0,\quad x'_{12} = 0,\quad x'_{14} = 0,\quad x'_{15} = 0,$$

so lässt sich jede der zehn den geraden Charakteristiken entsprechenden Grössen x':

$$x'_1,\; x'_2,\; x'_3,\; x'_4,\; x'_5,\; x'_6,\; x'_9,\; x'_{11},\; x'_{13},\; x'_{16},$$

auf acht Weisen durch jedesmal vier Grössen x linear ausdrücken. Die acht ein und dieselbe Grösse x' darstellenden Gleichungen können dann immer in zwei Gruppen zu je vier so zusammengefasst werden, dass die vier Gleichungen einer Gruppe jedesmal alle sechzehn Grössen x enthalten. Insofern solche vier Gleichungen durch Addition die dem betreffenden x' entsprechende Gleichung des Systems (S) ergeben, constituirt jede der beiden Gruppen eine merkwürdige Zerspaltung dieser letzteren. Die diesbezüglichen Gleichungen sind sämmtlich unter den Gleichungen der Tabelle II. enthalten, sobald man darin die den ungeraden Charakteristiken entsprechenden Grössen x', die dort einfach durch $\overline{7}'$, $\overline{8}'$, $\overline{10}'$, $\overline{12}'$, $\overline{14}'$, $\overline{15}'$ bezeichnet sind, gleich Null setzt, oder, was noch einfacher, sie ausfallen lässt; hier sollen dieselben in allgemeiner Gestalt direkt aus der Formel (F') des Art. 5. abgeleitet werden, da das betreffende Resultat auch für spätere Untersuchungen von Nutzen ist.

Bezeichnet man mit $[\omega_1], \ldots, [\omega_6]$ die sechs ungeraden Charakteristiken in der natürlichen Reihenfolge, mit $[\omega_0]$ eine beliebige der zehn geraden Charakteristiken, so lässt sich nach Satz 5. des Art. 2. dieselbe immer auf zwei Weisen in drei von einander verschiedene ungerade Charakteristiken zerlegen. Ist $[\omega_0] \equiv [\omega_\varrho \omega_\sigma \omega_\tau]$ die eine dieser Zerlegungen, so ist $[\omega_0] \equiv [\omega_{\varrho'} \omega_{\sigma'} \omega_{\tau'}]$ die andere, wenn ϱ', σ', τ' die drei von ϱ, σ, τ verschiedenen Zahlen aus der Reihe $1, \ldots, 6$ bezeichnen. Ersetzt man dann in der Formel (F') des Art. 5., in welcher $[\eta]$, $[\zeta]$ zwei ganz beliebige Charakteristiken bezeichnen, $[\eta]$ durch $[\omega_0]$, $[\zeta]$ durch $[\varkappa\omega_0]$, unter $[\varkappa]$ wieder eine beliebige Charakteristik verstanden, so nimmt dieselbe die Gestalt an:

$$x'_{[\omega_0]} + (-1)^{\alpha\,|\,\varkappa\omega_0} x'_{[\omega_0\alpha]} + (-1)^{\beta\,|\,\varkappa\omega_0} x'_{[\omega_0\beta]} + (-1)^{\alpha\beta\,|\,\varkappa\omega_0} x'_{[\omega_0\alpha\beta]}$$
$$= (-1)^{\varkappa\,|\,\omega_0}\Big(x_{[\varkappa\omega_0]} + (-1)^{\gamma\,|\,\omega_0} x_{[\varkappa\omega_0\gamma]} + (-1)^{\delta\,|\,\omega_0} x_{[\varkappa\omega_0\delta]} + (-1)^{\gamma\delta\,|\,\omega_0} x_{[\varkappa\omega_0\gamma\delta]}\Big).$$

Soll nun auf der linken Seite dieser Gleichung nur das eine Glied $x'_{[\omega_0]}$ stehen bleiben, so sind die Charakteristiken $[\alpha]$, $[\beta]$ so zu wählen, dass die drei Charakteristiken $[\omega_0\alpha]$, $[\omega_0\beta]$, $[\omega_0\alpha\beta]$ sämmtlich ungerade sind, da den gestellten Bedingungen gemäss dann

die entsprechenden Grössen x' verschwinden. Da aber $[\omega_0\alpha]+[\omega_0\beta]+[\omega_0\alpha\beta]\equiv[\omega_0]$ ist, so können die drei Charakteristiken $[\omega_0\alpha]$, $[\omega_0\beta]$, $[\omega_0\alpha\beta]$, wenn sie sämmtlich ungerade sein sollen, nur entweder mit $[\omega_\varrho]$, $[\omega_\sigma]$, $[\omega_\tau]$ oder mit $[\omega_{\varrho'}]$, $[\omega_{\sigma'}]$, $[\omega_{\tau'}]$ übereinstimmen. In welcher Reihenfolge diese Uebereinstimmung jedesmal stattfindet, ist gleichgültig, da durch eine Vertauschung der Charakteristiken $[\alpha]$, $[\beta]$, $[\alpha\beta]$ unter einander die obige Formel nicht geändert wird.

Es werde nun zunächst, entsprechend der Zerlegung $[\omega_0]\equiv[\omega_\varrho\omega_\sigma\omega_\tau]$,

$$[\omega_0\alpha]\equiv[\omega_\varrho], \qquad [\omega_0\beta]\equiv[\omega_\sigma], \qquad [\omega_0\alpha\beta]\equiv[\omega_\tau],$$

oder, was dasselbe:

$$[\alpha]\equiv[\omega_\sigma\omega_\tau], \qquad [\beta]\equiv[\omega_\varrho\omega_\tau], \qquad [\alpha\beta]\equiv[\omega_\varrho\omega_\sigma]$$

gesetzt; dann sind für $[\gamma]$, $[\delta]$, $[\gamma\delta]$ nach dem Früheren die drei von $[0]$ verschiedenen Lösungen $[\xi]$ der Gleichungen $(-1)^{\alpha\,|\,\xi}=+1$, $(-1)^{\beta\,|\,\xi}=+1$, entsprechend also hier die drei von $[0]$ verschiedenen Lösungen $[\xi]$ der Gleichungen $(-1)^{\omega_\sigma\omega_\tau\,|\,\xi}=+1$, $(-1)^{\omega_\varrho\omega_\tau\,|\,\xi}=+1$, in irgend welcher Reihenfolge, zu setzen, und da entsprechend der Relation (2) des Art. 3. $[\xi]\equiv[\omega_{\sigma'}\omega_{\tau'}]$, $[\omega_{\varrho'}\omega_{\tau'}]$, $[\omega_{\varrho'}\omega_{\sigma'}]$ diese drei Lösungen sind, so kann:

$$[\gamma]\equiv[\omega_{\sigma'}\omega_{\tau'}], \qquad [\delta]\equiv[\omega_{\varrho'}\omega_{\tau'}], \qquad [\gamma\delta]\equiv[\omega_{\varrho'}\omega_{\sigma'}]$$

gesetzt werden, woraus:

$$[\omega_0\gamma]\equiv[\omega_{\varrho'}], \qquad [\omega_0\delta]\equiv[\omega_{\sigma'}], \qquad [\omega_0\gamma\delta]\equiv[\omega_{\tau'}]$$

folgt. Führt man die so bestimmten Charakteristiken $[\alpha]$, $[\beta]$, $[\gamma]$, $[\delta]$ in die obige Gleichung ein, so nimmt dieselbe, wenn wieder $x_{[\varepsilon]}$ einfach mit (ε), $x'_{[\varepsilon]}$ mit $(\varepsilon)'$ bezeichnet wird, die Gestalt an:

$$(P_1)\quad (\omega_0)'=(-1)^{x\,|\,\omega_0}\Big[(x\omega_0)+(-1)^{\omega_{\varrho'}\,|\,\omega_0}(x\omega_{\varrho'})+(-1)^{\omega_{\sigma'}\,|\,\omega_0}(x\omega_{\sigma'})+(-1)^{\omega_{\tau'}\,|\,\omega_0}(x\omega_{\tau'})\Big].$$

In dieser Gleichung kann man jetzt für $[x]$ der Reihe nach die sechzehn verschiedenen Charakteristiken setzen. Von den so entstehenden sechzehn Gleichungen sind aber nur vier wesentlich verschieden. Um dies einzusehen, berücksichtige man, dass die letzte Gleichung wieder in sich selbst übergeht, wenn man $[x]$ um $[\omega_{\sigma'}\omega_{\tau'}]$, oder um $[\omega_{\varrho'}\omega_{\tau'}]$, oder um $[\omega_{\varrho'}\omega_{\sigma'}]$ vermehrt; theilt man daher die sechzehn Charakteristiken in die vier Gruppen:

$$\begin{array}{cccc}
[0], & [\omega_{\sigma'}\omega_{\tau'}], & [\omega_{\varrho'}\omega_{\tau'}], & [\omega_{\varrho'}\omega_{\sigma'}]; \\
[\omega_\sigma\omega_\tau], & [\omega_\varrho\omega_{\varrho'}], & [\omega_\varrho\omega_{\sigma'}], & [\omega_\varrho\omega_{\tau'}]; \\
[\omega_\varrho\omega_\tau], & [\omega_\sigma\omega_{\varrho'}], & [\omega_\sigma\omega_{\sigma'}], & [\omega_\sigma\omega_{\tau'}]; \\
[\omega_\varrho\omega_\sigma], & [\omega_\tau\omega_{\varrho'}], & [\omega_\tau\omega_{\sigma'}], & [\omega_\tau\omega_{\tau'}],
\end{array}$$

so erkennt man, dass immer die vier Charakteristiken einer Gruppe, an Stelle von $[x]$ gesetzt, dieselbe Gleichung hervorbringen, und dass daher die obige allgemeine Gleichung

(P_1) nur vier verschiedene specielle umfasst, welche aus ihr entstehen, indem man an Stelle von $[x]$ der Reihe nach die Charakteristiken:

$$[0], \qquad [\omega_\sigma \omega_\tau], \qquad [\omega_\varrho \omega_\tau], \qquad [\omega_\varrho \omega_\sigma]$$

setzt. Berücksichtigt man endlich, dass bei diesen Untersuchungen congruente Charakteristiken für einander gesetzt werden dürfen, so lassen sich die vier Gleichungen, wie folgt, schreiben:

$$(G_1)\quad \begin{aligned}
(\omega_0)' &= (\omega_0) + (-1)^{\omega_{\varrho'}|\omega_0}(\omega_{\varrho'}) + (-1)^{\omega_{\sigma'}|\omega_0}(\omega_{\sigma'}) + (-1)^{\omega_{\tau'}|\omega_0}(\omega_{\tau'}),\\
(\omega_0)' &= (-1)^{\omega_\varrho|\omega_0}\Big[(\omega_\varrho) + (-1)^{\omega_{\varrho'}|\omega_0}(\omega_\sigma\omega_\tau\omega_{\varrho'}) + (-1)^{\omega_{\sigma'}|\omega_0}(\omega_\sigma\omega_\tau\omega_{\sigma'}) + (-1)^{\omega_{\tau'}|\omega_0}(\omega_\sigma\omega_\tau\omega_{\tau'})\Big],\\
(\omega_0)' &= (-1)^{\omega_\sigma|\omega_0}\Big[(\omega_\sigma) + (-1)^{\omega_{\varrho'}|\omega_0}(\omega_\varrho\omega_\tau\omega_{\varrho'}) + (-1)^{\omega_{\sigma'}|\omega_0}(\omega_\varrho\omega_\tau\omega_{\sigma'}) + (-1)^{\omega_{\tau'}|\omega_0}(\omega_\varrho\omega_\tau\omega_{\tau'})\Big],\\
(\omega_0)' &= (-1)^{\omega_\tau|\omega_0}\Big[(\omega_\tau) + (-1)^{\omega_{\varrho'}|\omega_0}(\omega_\varrho\omega_\sigma\omega_{\varrho'}) + (-1)^{\omega_{\sigma'}|\omega_0}(\omega_\varrho\omega_\sigma\omega_{\sigma'}) + (-1)^{\omega_{\tau'}|\omega_0}(\omega_\varrho\omega_\sigma\omega_{\tau'})\Big].
\end{aligned}$$

Um die der zweiten Zerlegung der Charakteristik $[\omega_0]$ in drei ungerade Charakteristiken entsprechenden Gleichungen zu finden, hat man nur zu berücksichtigen, dass die beiden Zerlegungen, $[\omega_0] \equiv [\omega_\varrho \omega_\sigma \omega_\tau]$ und $[\omega_0] \equiv [\omega_{\varrho'} \omega_{\sigma'} \omega_{\tau'}]$, in einander übergehen, wenn man die Zahlen ϱ, σ, τ mit ϱ', σ', τ' beziehlich vertauscht, und dass daher aus den vier aufgestellten, der Zerlegung $[\omega_0] \equiv [\omega_\varrho \omega_\sigma \omega_\tau]$ entsprechenden Gleichungen die vier gesuchten, der Zerlegung $[\omega_0] \equiv [\omega_{\varrho'} \omega_{\sigma'} \omega_{\tau'}]$ entsprechenden hervorgehen, indem man die erwähnte Vertauschung in diesen Gleichungen vornimmt. Man erhält auf diese Weise die weiteren vier Gleichungen:

$$(G_2)\quad \begin{aligned}
(\omega_0)' &= (\omega_0) + (-1)^{\omega_\varrho|\omega_0}(\omega_\varrho) + (-1)^{\omega_\sigma|\omega_0}(\omega_\sigma) + (-1)^{\omega_\tau|\omega_0}(\omega_\tau)\\
(\omega_0)' &= (-1)^{\omega_{\varrho'}|\omega_0}\Big[(\omega_{\varrho'}) + (-1)^{\omega_\varrho|\omega_0}(\omega_{\sigma'}\omega_{\tau'}\omega_\varrho) + (-1)^{\omega_\sigma|\omega_0}(\omega_{\sigma'}\omega_{\tau'}\omega_\sigma) + (-1)^{\omega_\tau|\omega_0}(\omega_\sigma\omega_{\tau'}\omega_\tau)\Big],\\
(\omega_0)' &= (-1)^{\omega_{\sigma'}|\omega_0}\Big[(\omega_{\sigma'}) + (-1)^{\omega_\varrho|\omega_0}(\omega_{\varrho'}\omega_{\tau'}\omega_\varrho) + (-1)^{\omega_\sigma|\omega_0}(\omega_{\varrho'}\omega_{\tau'}\omega_\sigma) + (-1)^{\omega_\tau|\omega_0}(\omega_{\varrho'}\omega_{\tau'}\omega_\tau)\Big],\\
(\omega_0)' &= (-1)^{\omega_{\tau'}|\omega_0}\Big[(\omega_{\tau'}) + (-1)^{\omega_\varrho|\omega_0}(\omega_{\varrho'}\omega_{\sigma'}\omega_\varrho) + (-1)^{\omega_\sigma|\omega_0}(\omega_{\varrho'}\omega_{\sigma'}\omega_\sigma) + (-1)^{\omega_\tau|\omega_0}(\omega_{\varrho'}\omega_{\sigma'}\omega_\tau)\Big].
\end{aligned}$$

Die acht Gleichungen (G_1), (G_2) bilden zusammen die am Eingange erwähnten acht Darstellungen derselben Grösse $x'_{[\omega_0]}$ durch jedesmal vier Grössen x; auch erkennt man leicht, dass durch Addition der vier Gleichungen (G_1), aber auch durch Addition der vier Gleichungen (G_2) die der Charakteristik $[\omega_0]$ entsprechende Gleichung des ursprünglichen Systems (S), deren linke Seite von $4x'_{[\omega_0]}$ gebildet wird, entsteht, und dass daher die gleichfalls schon erwähnten beiden Zerspaltungen dieser letzten Gleichung durch die Systeme (G_1), (G_2) repräsentirt werden.

Lässt man jetzt in den acht Gleichungen (G_1), (G_2) an Stelle von $[\omega_o]$ der Reihe nach die zehn geraden Charakteristiken treten und ersetzt gleichzeitig $[\omega_\varrho]$, $[\omega_\sigma]$, $[\omega_\tau]$, $[\omega_{\varrho'}]$, $[\omega_{\sigma'}]$, $[\omega_{\tau'}]$ durch die ihnen jedesmal entsprechenden speciellen Charakteristiken, so erhält man für jede der zehn, den geraden Charakteristiken entsprechenden Grössen x' die acht oben erwähnten Darstellungen. Dieselben folgen hier in der Weise zusammengestellt, dass immer je vier zusammengehörige Gleichungen in derselben Horizontalreihe stehen:

$$
\begin{aligned}
x'_1 &= +x_1 +x_7 +x_{12}+x_{14} = +x_8 +x_2+x_{13}+x_{11} = +x_{10}+x_{16}+x_3+x_5 = +x_{15}+x_9 +x_6 +x_4 \,,\\
x'_1 &= +x_1 +x_8 +x_{10}+x_{15} = +x_7 +x_2+x_{16}+x_9 = +x_{12}+x_{13}+x_3+x_6 = +x_{14}+x_{11}+x_5 +x_4 \,;\\
x'_2 &= +x_2 +x_7 -x_{10}-x_{15} = +x_8 +x_1-x_{16}-x_9 = -x_{12}-x_{13}+x_4+x_5 = -x_{14}-x_{11}+x_6 +x_3 \,,\\
x'_2 &= +x_2 +x_8 -x_{12}-x_{14} = +x_7 +x_1-x_{13}-x_{11} = -x_{10}-x_{16}+x_4+x_6 = -x_{15}-x_9 +x_5 +x_3 \,;\\
x'_3 &= +x_3 -x_7 +x_{10}-x_{14} = -x_8 +x_4-x_{13}+x_9 = +x_{12}-x_{16}+x_1-x_5 = -x_{15}+x_{11}-x_6 +x_2 \,,\\
x'_3 &= +x_3 -x_8 +x_{12}-x_{15} = -x_7 +x_4-x_{16}+x_{11} = +x_{10}-x_{13}+x_1-x_6 = -x_{14}+x_9 -x_5 +x_2 \,;\\
x'_4 &= +x_4 -x_7 -x_{12}+x_{15} = -x_8 +x_3+x_{16}-x_{11} = -x_{10}+x_{13}+x_2-x_5 = +x_{14}-x_9 -x_6 +x_1 \,,\\
x'_4 &= +x_4 -x_8 -x_{10}+x_{14} = -x_7 +x_3+x_{13}-x_9 = -x_{12}+x_{16}+x_2-x_6 = +x_{15}-x_{11}-x_5 +x_1 \,;\\
x'_5 &= +x_5 -x_7 +x_{10}-x_{12} = -x_8 +x_6-x_{11}+x_9 = +x_{14}-x_{16}+x_1-x_3 = -x_{15}+x_{13}-x_4 +x_2 \,,\\
x'_5 &= +x_5 -x_8 +x_{14}-x_{15} = -x_7 +x_6-x_{16}+x_{13} = +x_{10}-x_{11}+x_1-x_4 = -x_{12}+x_9 -x_3 +x_2 \,;\\
x'_6 &= +x_6 -x_7 -x_{14}+x_{15} = -x_8 +x_5+x_{16}-x_{13} = -x_{10}+x_{11}+x_2-x_3 = +x_{12}-x_9 -x_4 +x_1 \,,\\
x'_6 &= +x_6 -x_8 -x_{10}+x_{12} = -x_7 +x_5+x_{11}-x_9 = -x_{14}+x_{16}+x_2-x_4 = +x_{15}-x_{13}-x_3 +x_1 \,;\\
x'_9 &= +x_9 +x_7 -x_8 -x_{10} = -x_{12}-x_6+x_5 +x_{11} = -x_{14}-x_4 +x_3+x_{13} = +x_{15}+x_1 -x_2 -x_{16} \,,\\
x'_9 &= +x_9 -x_{12}-x_{14}+x_{15} = +x_7 -x_6-x_4 +x_1 = -x_8 +x_5 +x_3-x_2 = -x_{10}+x_{11}+x_{13}-x_{16} \,;\\
x'_{11} &= +x_{11}-x_7 +x_8 -x_{12} = -x_{10}+x_6-x_5 +x_9 = +x_{14}-x_2 +x_1-x_{13} = -x_{15}+x_3 -x_4 +x_{16} \,,\\
x'_{11} &= +x_{11}-x_{10}+x_{14}-x_{15} = -x_7 +x_6-x_2 +x_3 = +x_8 -x_5 +x_1-x_4 = -x_{12}+x_9 -x_{13}+x_{16} \,;\\
x'_{13} &= +x_{13}-x_7 +x_8 -x_{14} = -x_{10}+x_4-x_3 +x_9 = +x_{12}-x_2 +x_1-x_{11} = -x_{15}+x_5 -x_6 +x_{16} \,,\\
x'_{13} &= +x_{13}-x_{10}+x_{12}-x_{15} = -x_7 +x_4-x_2 +x_5 = +x_8 -x_3 +x_1-x_6 = -x_{14}+x_9 -x_{11}+x_{16} \,;\\
x'_{16} &= +x_{16}+x_7 -x_8 -x_{15} = +x_{10}+x_1-x_2 -x_9 = -x_{12}-x_3 +x_4+x_{11} = -x_{14}-x_5 +x_6 +x_{13} \,,\\
x'_{16} &= +x_{16}+x_{10}-x_{12}-x_{14} = +x_7 +x_1-x_3 -x_5 = -x_8 -x_2 +x_4 +x_6 = -x_{15}-x_9 +x_{11}+x_{13} \,.
\end{aligned}
$$

10.

Wie im Vorigen gezeigt wurde, ziehen die Bedingungen:

$$x'_7 = 0,\ \ x'_8 = 0,\ \ x'_{10} = 0,\ \ x'_{12} = 0,\ \ x'_{14} = 0,\ \ x'_{15} = 0,$$

sobald man sie in das System (S) einführt, für die der beliebigen geraden Charakte-

ristik $[\omega_0]$ entsprechende Grösse $x'_{[\omega_0]}$ die acht Gleichungen (G_1), (G_2) nach sich. Die vier Gleichungen (G_1) wurden dabei aus der Formel:

$$(P_1)\quad (\omega_0)' = (-1)^{\varkappa|\omega_0}\Big[(\varkappa\omega_0) + (-1)^{\omega_{\varrho'}|\omega_0}(\varkappa\omega_{\varrho'}) + (-1)^{\omega_{\sigma'}|\omega_0}(\varkappa\omega_{\sigma'}) + (-1)^{\omega_{\tau'}|\omega_0}(\varkappa\omega_{\tau'})\Big]$$

abgeleitet, indem man für $[\varkappa]$ specielle Charakteristiken einführte. Auf dieselbe Weise können auch die Gleichungen (G_2) direkt erhalten werden, indem man von der Formel:

$$(P_2)\quad (\omega_0)' = (-1)^{\varkappa|\omega_0}\Big[(\varkappa\omega_0) + (-1)^{\omega_\varrho|\omega_0}(\varkappa\omega_\varrho) + (-1)^{\omega_\sigma|\omega_0}(\varkappa\omega_\sigma) + (-1)^{\omega_\tau|\omega_0}(\varkappa\omega_\tau)\Big]$$

ausgeht, die aus (P_1) durch Vertauschung von ϱ', σ', τ' mit ϱ, σ, τ beziehlich hervorgeht, und die früher gemachten Schlüsse im Wesentlichen wiederholt. Da in (P_1), (P_2) $[\omega_0]$ dieselbe Charakteristik bezeichnet, so stimmen die beiden Gleichungen hinsichtlich ihrer linken Seiten überein und liefern daher, indem man die rechten Seiten einander gleich setzt, die neue von x' freie Gleichung:

$$\begin{aligned}(R_0)\qquad & (-1)^{\varkappa|\omega_0}\Big[(\varkappa\omega_0) + (-1)^{\omega_{\varrho'}|\omega_0}(\varkappa\omega_{\varrho'}) + (-1)^{\omega_{\sigma'}|\omega_0}(\varkappa\omega_{\sigma'}) + (-1)^{\omega_{\tau'}|\omega_0}(\varkappa\omega_{\tau'})\Big] \\ & = (-1)^{\varkappa|\omega_0}\Big[(\varkappa\omega_0) + (-1)^{\omega_\varrho|\omega_0}(\varkappa\omega_\varrho) + (-1)^{\omega_\sigma|\omega_0}(\varkappa\omega_\sigma) + (-1)^{\omega_\tau|\omega_0}(\varkappa\omega_\tau)\Big].\end{aligned}$$

Nimmt man die auf der linken Seite der Gleichung (R_0) stehende Form und setzt darin an Stelle von $[\varkappa]$ der Reihe nach die sämmtlichen sechzehn Charakteristiken, so entstehen, wie im vorigen Artikel gezeigt wurde, im Ganzen nur vier verschiedene Ausdrücke, welche mit den vier die rechten Seiten der Gleichungen (G_1) bildenden Ausdrücken identisch sind; ebenso entstehen aus der die rechte Seite der Gleichung (R_0) bildenden Form, wenn man darin für $[\varkappa]$ der Reihe nach die sechzehn Charakteristiken setzt, auch nur vier verschiedene Ausdrücke, welche mit den vier die rechten Seiten der Gleichungen (G_2) bildenden Ausdrücken identisch sind. Die sechzehn Gleichungen, welche aus (R_0) hervorgehen, wenn man darin für $[\varkappa]$ der Reihe nach die sämmtlichen sechzehn Charakteristiken setzt, müssen daher nothwendig unter den sechzehn Gleichungen enthalten sein, welche entstehen, wenn man jede der vier Gleichungen (G_1) mit jeder der vier Gleichungen (G_2) in der Weise combinirt, dass man ihre rechten Seiten einander gleich setzt. Könnte man nun noch zeigen, dass die sechzehn auf die angegebene Weise aus (R_0) entstehenden Gleichungen sämmtlich von einander verschieden sind, so würde daraus folgen, dass dieselben in jeder Beziehung mit den sechzehn aus (G_1), (G_2) in angegebener Weise entstehenden Gleichungen übereinstimmen. Zur Durchführung dieser Untersuchung empfiehlt es sich der Formel (R_0) vorher eine andere Gestalt zu geben.

Unterdrückt man in (R_0) den beiden Seiten gemeinsamen Factor $(-1)^{\varkappa|\omega_0}$, zerstört auch das erste Glied der linken Seite gegen das ihm gleiche erste Glied der rechten und multiplicirt endlich linke wie rechte Seite mit $(-1)^{\omega_\xi|\omega_0}$, unter ξ eine beliebige Zahl aus der Reihe $1, \ldots, 6$ verstanden, so nimmt die Gleichung (R_0), wenn man noch berücksichtigt, dass für $\iota = 1, \ldots, 6$ die Relation:

$$(-1)^{\omega_\iota|\omega_o} \cdot (-1)^{\omega_\xi|\omega_o} = (-1)^{\omega_\iota\omega_\xi|\omega_o} = (-1)^{|\omega_\iota\omega_\xi|} \cdot (-1)^{|\omega_o|} \cdot (-1)^{|\omega_\iota\omega_\xi\omega_o|}$$

$$= (-1)^{|\omega_\xi\omega_o\omega_\iota|} \cdot (-1)^{\omega_\iota|\omega_\xi}$$

besteht, zunächst die folgende Form an:

$$(-1)^{|\omega_\xi\omega_{\sigma'}\omega_{\tau'}|} \cdot (-1)^{\omega_{\varrho'}|\omega_\xi}(\varkappa\omega_{\varrho'}) + (-1)^{|\omega_\xi\omega_{\varrho'}\omega_{\tau'}|} \cdot (-1)^{\omega_{\sigma'}|\omega_\xi}(\varkappa\omega_{\sigma'})$$

$$+ (-1)^{|\omega_\xi\omega_{\varrho'}\omega_{\sigma'}|} \cdot (-1)^{\omega_{\tau'}|\omega_\xi}(\varkappa\omega_{\tau'}) - (-1)^{|\omega_\xi\omega_\sigma\omega_\tau|} \cdot (-1)^{\omega_\varrho|\omega_\xi}(\varkappa\omega_\varrho)$$

$$- (-1)^{|\omega_\xi\omega_\varrho\omega_\tau|} \cdot (-1)^{\omega_\sigma|\omega_\xi}(\varkappa\omega_\sigma) - (-1)^{|\omega_\xi\omega_\varrho\omega_\sigma|} \cdot (-1)^{\omega_\tau|\omega_\xi}(\varkappa\omega_\tau) = 0.$$

Dieser letzten Gleichung kann man aber, wenn man nur beachtet, dass immer $(-1)^{|\omega_\lambda|} = -1$, und, bei von einander verschiedenen λ, μ, ν, $(-1)^{|\omega_\lambda\omega_\mu\omega_\nu|} = +1$ ist, stets auch die Gestalt:

$$(R) \qquad 2(\varkappa\omega_\xi) = \sum_{i=1}^{i=6}(-1)^{\omega_i|\omega_\xi}(\varkappa\omega_i)$$

geben. Die Gleichung (R) ist dann, wie unmittelbar klar, von der ursprünglichen Gleichung (R_0) nicht wesentlich verschieden; wegen ihrer übersichtlicheren Gestalt soll sie im Folgenden an Stelle von (R_0) verwendet werden. Man thut gut, schon hier zu bemerken, dass immer dieselbe Gleichung entsteht, wenn man in (R) an Stelle von ξ der Reihe nach die Zahlen $1, \ldots, 6$ setzt; denn, da die Gleichung (R) sich von der Gleichung (R_0) nur durch die Form unterscheidet, (R_0) aber von ξ vollständig frei ist, so kann die Gleichung (R) beim Uebergange von einem Werthe ξ zu einem anderen nicht wesentlich geändert werden. Mit Rücksicht hierauf kann man auch, wie in der Folge zuweilen geschehen wird, ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit der Formel (R), ξ auf eine oder einige der Zahlen $1, \ldots, 6$ beschränken. Für die Formel (R) wurde die obige Schreibweise desshalb gewählt, weil durch Vereinigung des die linke Seite der Gleichung bildenden Gliedes $2(\varkappa\omega_\xi)$ mit dem auf der rechten Seite vorkommenden Gliede $(\varkappa\omega_\xi)$ die einheitliche Bezeichnung in hohem Grade gestört würde. Aus dem Gesagten folgt schliesslich noch, dass die Formel (R) vollständig unabhängig ist von der Reihenfolge, in welcher die ungeraden Charakteristiken mit $[\omega_1], \ldots, [\omega_6]$ bezeichnet werden.

In der Gleichung (R) vertritt das Symbol $(\varkappa\omega_i)$ die Grösse $x_{|\varkappa\omega_i|}$, man kann daher der Gleichung (R) auch die Form:

$$(R) \qquad 2x_{|\varkappa\omega_\xi|} = \sum_{i=1}^{i=6}(-1)^{\omega_i|\omega_\xi}\, x_{|\varkappa\omega_i|}$$

geben. Führt man in dieser Gleichung an Stelle von $[\varkappa]$ der Reihe nach die sämmtlichen sechzehn Charakteristiken in der natürlichen Reihenfolge ein, so treten an Stelle des Charakteristikensystems $[\varkappa\omega_1], \ldots, [\varkappa\omega_6]$ der Reihe nach sechzehn Systeme von je sechs speciellen Charakteristiken, die man in der folgenden Tabelle in der Weise angeschrieben findet, dass die Charakteristiken durch ihre Stellenzahlen bezeichnet, und ausserdem die den ungeraden Charakteristiken entsprechenden Stellenzahlen durch Horizontalstriche hervorgehoben sind.

$$
\begin{array}{cccccc}
\bar{7}, & \bar{8}, & \overline{10}, & \overline{12}, & \overline{14}, & \overline{15}; \\
\bar{8}, & \bar{7}, & 9, & 11, & 13, & 16; \\
5, & 6, & \overline{12}, & \overline{10}, & 16, & 13; \\
6, & 5, & 11, & 9, & \overline{15}, & \overline{14}; \\
3, & 4, & \overline{14}, & 16, & \overline{10}, & 11; \\
4, & 3, & 13, & \overline{15}, & 9, & \overline{12}; \\
1, & 2, & 16, & \overline{14}, & \overline{12}, & 9; \\
2, & 1, & \overline{15}, & 13, & 11, & \overline{10}; \\
\overline{15}, & 16, & 2, & 4, & 6, & \bar{7}; \\
16, & \overline{15}, & 1, & 3, & 5, & \bar{8}; \\
13, & \overline{14}, & 4, & 2, & \bar{8}, & 5; \\
\overline{14}, & 13, & 3, & 1, & \bar{7}, & 6; \\
11, & \overline{12}, & 6, & \bar{8}, & 2, & 3; \\
\overline{12}, & 11, & 5, & \bar{7}, & 1, & 4; \\
9, & 10, & \bar{8}, & 6, & 4, & 1; \\
\overline{10}, & 9, & \bar{7}, & 5, & 3, & 2.
\end{array}
$$

Diese Tabelle bildet, wie unmittelbar klar, einen Theil der am Schlusse des Art. 2. aufgestellten Additionstabelle; ein Blick auf dieselbe zeigt, dass von den so entstandenen Systemen von je sechs Charakteristiken keine zwei dieselben sechs Charakteristiken enthalten, und es sind daher auch die sechzehn Gleichungen, die aus (R) hervorgehen, indem man für $[\varkappa]$ der Reihe nach die sechzehn Charakteristiken setzt, sämmtlich von einander verschieden; damit ist aber, mit Rücksicht auf das früher Bemerkte, zugleich bewiesen, dass dieselben mit den sechzehn durch Combination der Gleichungen (G_1), (G_2) entstehenden Gleichungen identisch sind. Nun sind aber gleichzeitig mit der Formel (R) die sechzehn aus ihr abgeleiteten Gleichungen vollständig frei von $[\omega_0]$, und es können daher auch die durch Combination von (G_1) und (G_2) entstehenden Gleichungen, da sie mit den aus (R) hervorgehenden identisch sind, nicht von $[\omega_0]$ abhängig sein. Jede der zehn, je acht Gleichungen enthaltenden Gruppen, die aus (G_1), (G_2) entstehen, indem man für $[\omega_0]$ der Reihe nach die zehn geraden Charakteristiken setzt, liefert daher, wenn man ihre Gleichungen in der angegebenen Weise combinirt, dieselben sechzehn Gleichungen, wie jede andere.

Mit Rücksicht auf die obige Tabelle kann man die sechzehn aus (R) hervorgehenden Gleichungen, wie folgt, schreiben:

1. $x_7 - x_8 - x_{10} + x_{12} + x_{14} - x_{15} = 0,$ 2. $x_8 - x_7 - x_9 + x_{11} + x_{13} - x_{16} = 0,$
3. $x_5 - x_6 - x_{12} + x_{10} + x_{16} - x_{13} = 0,$ 4. $x_6 - x_5 - x_{11} + x_9 + x_{15} - x_{14} = 0,$
5. $x_3 - x_4 - x_{14} + x_{16} + x_{10} - x_{11} = 0,$ 6. $x_4 - x_3 - x_{13} + x_{15} + x_9 - x_{12} = 0,$

$$7.\ x_1 - x_2 - x_{16} + x_{14} + x_{12} - x_9 = 0, \qquad 8.\ x_2 - x_1 - x_{15} + x_{13} + x_{11} - x_{10} = 0,$$
$$9.\ x_{15} - x_{16} - x_2 + x_4 + x_6 - x_7 = 0, \qquad 10.\ x_{16} - x_{15} - x_1 + x_3 + x_5 - x_8 = 0,$$
$$11.\ x_{13} - x_{14} - x_4 + x_2 + x_8 - x_5 = 0, \qquad 12.\ x_{14} - x_{13} - x_3 + x_1 + x_7 - x_6 = 0,$$
$$13.\ x_{11} - x_{12} - x_6 + x_8 + x_2 - x_3 = 0, \qquad 14.\ x_{12} - x_{11} - x_5 + x_7 + x_1 - x_4 = 0,$$
$$15.\ x_9 - x_{10} - x_8 + x_6 + x_4 - x_1 = 0, \qquad 16.\ x_{10} - x_9 - x_7 + x_5 + x_3 - x_2 = 0.$$

Bezeichnet man nun die linken Seiten dieser Gleichungen mit $L_1, \ldots, L_{16}$, so kann man aus diesen sechzehn Formen auf mehrere Weisen sechs linearunabhängige auswählen; aus solchen sechs lassen sich dann immer die zehn übrigen linear zusammensetzen. Man überzeugt sich leicht, dass speciell die Formen L_7, L_8, L_{10}, L_{12}, L_{14}, L_{15} linearunabhängig sind, und dass die zehn übrigen aus ihnen sich folgendermassen zusammensetzen:

$$\begin{aligned}
L_1 &= + L_7 + L_8 + L_{10} + L_{12} + L_{14} + L_{15},\\
L_2 &= + L_7 + L_8 - L_{10} - L_{12} - L_{14} - L_{15},\\
L_3 &= - L_7 - L_8 + L_{10} + L_{12} - L_{14} - L_{15},\\
L_4 &= - L_7 - L_8 - L_{10} - L_{12} + L_{14} + L_{15},\\
L_5 &= - L_7 - L_8 + L_{10} - L_{12} + L_{14} - L_{15},\\
L_6 &= - L_7 - L_8 - L_{10} + L_{12} - L_{14} + L_{15},\\
L_9 &= + L_7 - L_8 - L_{10} - L_{12} - L_{14} + L_{15},\\
L_{11} &= - L_7 + L_8 - L_{10} - L_{12} + L_{14} - L_{15},\\
L_{13} &= - L_7 + L_8 - L_{10} + L_{12} - L_{14} - L_{15},\\
L_{16} &= + L_7 - L_8 + L_{10} - L_{12} - L_{14} - L_{15}.
\end{aligned}$$

Auch zeigt eine einfache Rechnung, dass zwischen den sechs Formen $L_7, L_8, L_{10}, L_{12}, L_{14}, L_{15}$ und den sechs in Bezug auf die Grössen x gleichfalls linearen Formen, die sich aus dem Systeme (S) für x'_7, x'_8, x'_{10}, x'_{12}, x'_{14}, x'_{15} ergeben, die folgenden in Bezug auf die Grössen $x_1, \ldots, x_{16}$ identischen Gleichungen:

$$8x'_7 = L - 4L_7,\quad 8x'_8 = L + 4L_8,\quad 8x'_{10} = L + 4L_{10},$$
$$8x'_{12} = L - 4L_{12},\quad 8x'_{14} = L - 4L_{14},\quad 8x'_{15} = L + 4L_{15}$$

bestehen, wobei zur Abkürzung

$$L_7 - L_8 - L_{10} + L_{12} + L_{14} - L_{15} = L$$

gesetzt ist. Aus $L_1 = 0, \ldots, L_{16} = 0$ folgt daher auch rückwärts $x'_7 = 0$, $x'_8 = 0$, $x'_{10} = 0$, $x'_{12} = 0$, $x'_{14} = 0$, $x'_{15} = 0$, und man kann daher die ursprünglich aufgestellten Bedingungsgleichungen $x'_7 = 0$, $x'_8 = 0$, $x'_{10} = 0$, $x'_{12} = 0$, $x'_{14} = 0$, $x'_{15} = 0$ stets durch die Gleichungen $L_1 = 0, \ldots, L_{16} = 0$, aber auch durch je sechs von einander unabhängige dieser sechzehn ersetzen.

Die oben fixirten sechzehn Systeme von je sechs Charakteristiken, die aus dem Systeme $[\varkappa\omega_1], \ldots, [\varkappa\omega_6]$ hervorgehen, indem man darin an Stelle von $[\varkappa]$ der Reihe nach sämmtliche sechzehn Charakteristiken treten lässt, sind für die späteren Untersuchungen von grosser Bedeutung. Sie sollen im Folgenden *Rosenhain*'sche Sechsersysteme oder kurz Sechsersysteme genannt werden. Hier mögen noch folgende Eigenschaften derselben, die sich unmittelbar aus der aufgestellten Tabelle ergeben, erwähnt werden.

1. Das dem Falle $[\varkappa] = [0]$ entsprechende Sechsersystem enthält die sämmtlichen ungeraden Charakteristiken; jedes der fünfzehn übrigen Systeme enthält zwei ungerade und vier gerade Charakteristiken. (Vergl. Satz 8. des Art. 2.)

2. Zwei beliebige Sechsersysteme haben immer zwei und nur zwei Charakteristiken gemeinsam. Nimmt die eine dieser Charakteristiken in dem ersten der beiden Systeme die μ^{te}, in dem zweiten die ν^{te} Stelle ein, so steht die andere in dem ersten Systeme an ν^{ter}, in dem zweiten an μ^{ter} Stelle.

11.

Bei den in Art. 5., 6., 7. durchgeführten Untersuchungen wurde lediglich vorausgesetzt, dass die x, x' Grössen bezeichnen, welche den sechzehn Gleichungen (S) genügen. Die ausschliesslich unter dieser Voraussetzung aus (S) abgeleiteten Relationen, speciell also die Formeln (S_1), (S_2) und die sämmtlichen Gleichungen der Tabellen I., II. bleiben daher richtig, wenn man wieder zu den ursprünglich mit x, x' bezeichneten, den Gleichungen (S) genügenden ϑ-Producten zurückkehrt, also allgemein:

$$x_{[\varepsilon]} = \vartheta[\varepsilon](\!(2u)\!)\vartheta[\varepsilon+\varrho](\!(2v)\!)\vartheta[\varepsilon+\sigma](\!(2w)\!)\vartheta[\varepsilon-\varrho-\sigma](\!(2t)\!),$$
$$x'_{[\eta]} = \vartheta[\eta](\!(2u')\!)\vartheta[\eta+\varrho](\!(2v')\!)\vartheta[\eta+\sigma](\!(2w')\!)\vartheta[\eta-\varrho-\sigma](\!(2t')\!)$$

setzt. Auf diese Weise entsteht dann aus jeder in den Tabellen enthaltenen Gleichung eine ϑ-Formel, und aus jeder solchen ϑ-Formel kann man weiter einundfünfzig verschiedene specielle ableiten, indem man jede der beiden darin vorkommenden, noch willkürlichen Charakteristiken $[\varrho]$, $[\sigma]$ unabhängig von der anderen die Reihe der sechzehn Normalcharakteristiken durchlaufen lässt und von den so entstehenden Formeln solche, welche durch Vertauschung von zweien der drei Variablensysteme $(v), (w), (t)$ und dadurch bedingte gleichzeitige Vertauschung der entsprechenden beiden Systeme aus der Reihe $(v'), (w'), (t')$ in einander übergehen, als nicht verschieden betrachtet. Dabei mag noch bemerkt werden, dass, wenn man für $[\varrho]$ oder $[\sigma]$ congruente Charakteristiken setzt, die dadurch entstehenden Formeln sich nur um einen, allen Gliedern gemeinsamen Factor ± 1 unterscheiden, also nicht wesentlich verschieden sind. Aus dem in der Tabelle I. enthaltenen ersten Systeme von sechzehn Gleichungen gehen durch das beschriebene Verfahren einundfünfzig specielle Formelsysteme von je sechzehn Gleichungen hervor, welche, wenn man noch die dabei auftretenden Charakteristiken, die nicht Normalcharakteristiken sind, mit Hülfe der Gleichungen (3), (4) des Art. 1. auf solche reducirt, mit den von

Herrn *Rosenhain**) in seinen Tafeln aufgestellten einundfünfzig Formelsystemen, abgesehen von der Bezeichnung, übereinstimmen. Fixirt man die für $[\varrho]$, $[\sigma]$ eintretenden Normalcharakteristiken durch die ihnen in der natürlichen Reihenfolge zukommenden Stellenzahlen μ, ν, unter Anwendung der symbolischen Bezeichnung $[\varrho]=\mu$, $[\sigma]=\nu$, setzt auch $[\varrho\sigma]=\lambda$, wenn λ die Stellenzahl der der Charakteristik $[\varrho\sigma]$ congruenten Normalcharakteristik ist, so entsprechen den einunfünfzig *Rosenhain*'schen Systemen von je sechzehn Gleichungen der Reihe nach die Zahlen:

1. $[\varrho]=1, [\sigma]=1, [\varrho\sigma]=1$;	2. $[\varrho]=1, [\sigma]=9, [\varrho\sigma]=9$;	3. $[\varrho]=1, [\sigma]=5, [\varrho\sigma]=5$;
4. $[\varrho]=1, [\sigma]=13, [\varrho\sigma]=13$;	5. $[\varrho]=1, [\sigma]=2, [\varrho\sigma]=2$;	6. $[\varrho]=1, [\sigma]=10, [\varrho\sigma]=10$;
7. $[\varrho]=1, [\sigma]=6, [\varrho\sigma]=6$;	8. $[\varrho]=1, [\sigma]=14, [\varrho\sigma]=14$;	9. $[\varrho]=1, [\sigma]=4, [\varrho\sigma]=4$;
10. $[\varrho]=1, [\sigma]=12, [\varrho\sigma]=12$;	11. $[\varrho]=1, [\sigma]=8, [\varrho\sigma]=8$;	12. $[\varrho]=1, [\sigma]=16, [\varrho\sigma]=16$;
13. $[\varrho]=1, [\sigma]=3, [\varrho\sigma]=3$;	14. $[\varrho]=1, [\sigma]=11, [\varrho\sigma]=11$;	15. $[\varrho]=1, [\sigma]=7, [\varrho\sigma]=7$;
16. $[\varrho]=1, [\sigma]=15, [\varrho\sigma]=15$;	17. $[\varrho]=2, [\sigma]=9, [\varrho\sigma]=10$;	18. $[\varrho]=2, [\sigma]=5, [\varrho\sigma]=6$;
19. $[\varrho]=2, [\sigma]=13, [\varrho\sigma]=14$;	20. $[\varrho]=2, [\sigma]=4, [\varrho\sigma]=3$;	21. $[\varrho]=2, [\sigma]=12, [\varrho\sigma]=11$;
22. $[\varrho]=2, [\sigma]=8, [\varrho\sigma]=7$;	23. $[\varrho]=2, [\sigma]=16, [\varrho\sigma]=15$;	24. $[\varrho]=3, [\sigma]=9, [\varrho\sigma]=11$;
25. $[\varrho]=3, [\sigma]=5, [\varrho\sigma]=7$;	26. $[\varrho]=3, [\sigma]=13, [\varrho\sigma]=15$;	27. $[\varrho]=3, [\sigma]=6, [\varrho\sigma]=8$;
28. $[\varrho]=3, [\sigma]=16, [\varrho\sigma]=14$;	29. $[\varrho]=3, [\sigma]=10, [\varrho\sigma]=12$;	30. $[\varrho]=4, [\sigma]=9, [\varrho\sigma]=12$;
31. $[\varrho]=4, [\sigma]=5, [\varrho\sigma]=8$;	32. $[\varrho]=4, [\sigma]=13, [\varrho\sigma]=16$;	33. $[\varrho]=4, [\sigma]=6, [\varrho\sigma]=7$;
34. $[\varrho]=9, [\sigma]=5, [\varrho\sigma]=13$;	35. $[\varrho]=6, [\sigma]=13, [\varrho\sigma]=10$;	36. $[\varrho]=5, [\sigma]=10, [\varrho\sigma]=14$;
37. $[\varrho]=6, [\sigma]=9, [\varrho\sigma]=14$;	38. $[\varrho]=12, [\sigma]=5, [\varrho\sigma]=16$;	39. $[\varrho]=8, [\sigma]=13, [\varrho\sigma]=12$;
40. $[\varrho]=8, [\sigma]=9, [\varrho\sigma]=16$;	41. $[\varrho]=11, [\sigma]=5, [\varrho\sigma]=15$;	42. $[\varrho]=11, [\sigma]=13, [\varrho\sigma]=7$;
43. $[\varrho]=9, [\sigma]=7, [\varrho\sigma]=15$;	44. $[\varrho]=4, [\sigma]=11, [\varrho\sigma]=10$;	45. $[\varrho]=4, [\sigma]=15, [\varrho\sigma]=14$;
46. $[\varrho]=6, [\sigma]=15, [\varrho\sigma]=12$;	47. $[\varrho]=12, [\sigma]=14, [\varrho\sigma]=7$;	48. $[\varrho]=8, [\sigma]=15, [\varrho\sigma]=10$;
49. $[\varrho]=8, [\sigma]=11, [\varrho\sigma]=14$;	50. $[\varrho]=10, [\sigma]=16, [\varrho\sigma]=7$;	51. $[\varrho]=6, [\sigma]=11, [\varrho\sigma]=16$.

12.

Während die in den Formeln (S_1), (S_2) und in den daraus abgeleiteten Gleichungen der Tabellen I., II. vorkommenden Grössen x, x' nur den sechzehn Gleichungen (S) zu genügen haben, müssen die in den Relationen (P_1), (P_2), (G_1), (G_2), (R) der Art. 9. und 10. auftretenden Grössen x, x', wenn anders diese Relationen bestehen sollen, nicht nur die Gleichungen (S), sondern auch die sechs weiteren Bedingungen:

$$x'_7=0,\quad x'_8=0,\quad x'_{10}=0,\quad x'_{12}=0,\quad x'_{14}=0,\quad x'_{15}=0$$

erfüllen. Sollen daher die im vorigen Artikel mit x, x' bezeichneten, den Gleichungen (S) unter allen Umständen genügenden ϑ-Producte auch in diesen Relationen an Stelle

*) *Rosenhain*, Mémoire sur les fonctions etc. pag. 443.

von x, x' gesetzt werden dürfen, so sind die in diesen ϑ-Reihen vorkommenden unabhängigen Variablen (u), (v), (w), (t) vorher solchen Bedingungen zu unterwerfen, dass:

$$x'_{[\eta]} = \vartheta[\eta]((2u'))\,\vartheta[\eta+\varrho]((2v'))\,\vartheta[\eta+\sigma]((2w'))\,\vartheta[\eta-\varrho-\sigma]((2t'))$$

immer verschwindet, wenn für $[\eta]$ eine der sechs ungeraden Charakteristiken eintritt. Berücksichtigt man nun, dass $\vartheta[\eta]((0))$ für jede ungerade Charakteristik $[\eta]$ den Werth Null hat, so ergibt sich, dass der gestellten Forderung auf möglichst einfache Weise genügt wird, wenn man $(2u') = (0)$, oder, was dasselbe:

$$(u+v+w+t) = (0), \qquad (t) = (-u-v-w)$$

setzt. Führt man das so bestimmte (t) in die in Art. 1. für:

$$(2u'), \qquad (2v'), \qquad (2w'), \qquad (2t')$$

aufgestellten Ausdrücke ein, so gehen dieselben beziehlich über in:

$$(0), \quad (2u+2v), \quad (2u+2w), \quad (-2v-2w),$$

und es nehmen daher die im vorigen Artikel mit $x_{[\varepsilon]}$, $x'_{[\eta]}$ bezeichneten ϑ-Producte — wenn man darin allenthalben (t) durch $(-u-v-w)$ ersetzt, ferner für (u), (v), (w) in neuer Bezeichnung $\left(\frac{u}{2}\right)$, $\left(\frac{v}{2}\right)$, $\left(\frac{w}{2}\right)$ schreibt und endlich unter Anwendung der aus (3), (4) des Art. 1. unmittelbar folgenden Formel:

$$\vartheta[\varkappa]((U)) = (-1)^{(\varkappa)(\lambda)'}\,\vartheta[\varkappa+2\lambda]((U))$$

die ϑ-Reihen mit den Charakteristiken $[\varepsilon-\varrho-\sigma]$, $[\eta-\varrho-\sigma]$ in solche mit den Charakteristiken $[\varepsilon+\varrho+\sigma]$, $[\eta+\varrho+\sigma]$ beziehlich verwandelt — schliesslich die Gestalt:

$$x_{[\varepsilon]} = (-1)^{(\varepsilon)(\varrho\sigma)'}\,\vartheta[\varepsilon]((u))\,\vartheta[\varepsilon\varrho]((o))\,\vartheta[\varepsilon\sigma]((w))\,\vartheta[\varepsilon\varrho\sigma]((-u-v-w)),$$
$$x'_{[\eta]} = (-1)^{(\eta)(\varrho\sigma)'}\,\vartheta[\eta]((o))\,\vartheta[\eta\varrho]((u+v))\,\vartheta[\eta\sigma]((u+w))\,\vartheta[\eta\varrho\sigma]((-v-w))$$

an, wobei, unter Anwendung des in Art. 3. für den Ausdruck $(-1)^{\varkappa_1\lambda_1'+\varkappa_2\lambda_2'}$ eingeführten Symbols $(-1)^{(\varkappa)(\lambda)'}$, zur Abkürzung

$$(-1)^{\varepsilon_1(\varrho_1'+\sigma_1')+\varepsilon_2(\varrho_2'+\sigma_2')} = (-1)^{(\varepsilon)(\varrho\sigma)'}, \quad (-1)^{\eta_1(\varrho_1'+\sigma_1')+\eta_2(\varrho_2'+\sigma_2')} = (-1)^{(\eta)(\varrho\sigma)'}$$

gesetzt ist, und die (u), (v), (w), wie bisher, unabhängige Variablen bezeichnen. Die durch die letzten Formeln definirten Grössen x, x' genügen dann nicht nur den sechzehn Gleichungen (S), sondern erfüllen auch die sechs weiteren Bedingungen $x'_7 = 0$, $x'_8 = 0$, $x'_{10} = 0$, $x'_{12} = 0$, $x'_{14} = 0$, $x'_{15} = 0$, und es bleiben daher die Relationen (P_1), (P_2), (G_1), (G_2), (R) richtig, wenn man darin statt der Grössen x, x' die obigen ϑ-Producte einführt. Die auf diese Weise aus (P_1), (P_2), (G_1), (G_2) hervorgehenden ϑ-Formeln werden später ihre Verwendung finden; hier sollen zunächst die aus (R) folgenden ϑ-Formeln einer eingehenden Betrachtung unterzogen werden.

Führt man in der Formel (R) an Stelle der Grössen x die ihnen entsprechenden ϑ-Producte ein und ersetzt zugleich die willkürlichen Veränderlichen (v), (w) durch $(-v)$, $(-w)$ beziehlich, so geht aus (R) unter Anwendung der Formel 5. des Art. 1. und unter Beachtung der Beziehungen:

$(-1)^{|\varkappa\varrho|}\cdot(-1)^{|\varkappa\sigma|}=(-1)^{|\varrho|}\cdot(-1)^{|\sigma|}\cdot(-1)^{\varkappa|\varrho\sigma}$, $(-1)^{\varkappa|\varrho\sigma}\cdot(-1)^{(\varkappa)(\varrho\sigma)'}=(-1)^{(\varrho\sigma)(\varkappa)'}$,

nach einigen leichten Umformungen die Gleichung:

$$(\Theta)\quad 2\vartheta[\varkappa\omega_\xi]((u))\,\vartheta[\varkappa\omega_\xi\varrho]((v))\,\vartheta[\varkappa\omega_\xi\sigma]((w))\,\vartheta[\varkappa\omega_\xi\varrho\sigma]((-u+v+w))$$

$$=\sum_{i=1}^{i=6}(-1)^{\omega_i|\omega_\xi}\cdot(-1)^{(\varrho\sigma)(\omega_i\omega_\xi)'}\vartheta[\varkappa\omega_i]((u))\,\vartheta[\varkappa\omega_i\varrho]((v))\,\vartheta[\varkappa\omega_i\sigma]((w))\,\vartheta[\varkappa\omega_i\varrho\sigma]((-u+v+w))$$

hervor, in welcher $[\varkappa]$, $[\varrho]$, $[\sigma]$ beliebige Charakteristiken, $[\omega_1], \ldots, [\omega_6]$ die sechs ungeraden Charakteristiken in beliebiger Reihenfolge, (u), (v), (w) unabhängige Variablen bezeichnen. Diese Gleichung geht wieder in sich selbst über, wenn man $[\varkappa]$, $[\varrho]$, $[\sigma]$ allenthalben durch irgend welche ihnen congruente Charakteristiken ersetzt. Mit Rücksicht darauf sollen im Folgenden, wenn es sich um Charakteristiken handelt, die an Stelle von $[\varkappa]$, $[\varrho]$ oder $[\sigma]$ zu treten bestimmt sind, unter verschiedenen Charakteristiken nur solche verstanden werden, welche einander nicht congruent sind. Die Gleichung (Θ), die als eine für die Theorie der zweifach unendlichen ϑ-Reihen fundamentale angesehen werden muss, soll jetzt zur Herstellung einer Reihe von wichtigen ϑ-Formeln benutzt werden. Zu dem Ende unterscheide man in Bezug auf die Charakteristiken $[\varrho]$, $[\sigma]$ die folgenden drei Fälle:

A.) die Charakteristiken $[\varrho]$, $[\sigma]$ seien beide gleich $[0]$;

B.) eine der beiden Charakteristiken $[\varrho]$, $[\sigma]$ sei gleich $[0]$, die andere von $[0]$ verschieden;

C.) die Charakteristiken $[\varrho]$, $[\sigma]$ seien sowohl von einander, als von $[0]$ verschieden.

Der Fall, wo die Charakteristiken $[\varrho]$, $[\sigma]$ zwar von $[0]$, nicht aber von einander verschieden sind, führt, da dann $[\varrho\sigma]\equiv[0]$ ist, zu Formeln, welche von den dem Falle *B.* entsprechenden nicht wesentlich verschieden sind, und kann deshalb von der Betrachtung ausgeschlossen werden. Jeder der drei Fälle soll jetzt für sich weiter behandelt werden.

Fall A.

Ist $[\varrho]=[0]$, $[\sigma]=[0]$, so nimmt die Formel (Θ) die Gestalt:

$$(A_1)\quad 2\vartheta[\varkappa\omega_\xi]((u))\,\vartheta[\varkappa\omega_\xi]((v))\,\vartheta[\varkappa\omega_\xi]((w))\,\vartheta[\varkappa\omega_\xi]((-u+v+w))$$

$$=\sum_{i=1}^{i=6}(-1)^{\omega_i|\omega_\xi}\vartheta[\varkappa\omega_i]((u))\,\vartheta[\varkappa\omega_i]((v))\,\vartheta[\varkappa\omega_i]((w))\,\vartheta[\varkappa\omega_i]((-u+v+w)),$$

$$(\xi=1,2,\ldots,6)$$

an. Aus dieser Formel folgt weiter, wenn man (w) in (u) übergehen lässt, die Gleichung:

$$(A_2)\quad 2\vartheta^2[\varkappa\omega_\xi]((u))\,\vartheta^2[\varkappa\omega_\xi]((v))=\sum_{i=1}^{i=6}(-1)^{\omega_i|\omega_\xi}\vartheta^2[\varkappa\omega_i]((u))\,\vartheta^2[\varkappa\omega_i]((v)),\quad(\xi=1,\ldots,6)$$

und hieraus, wenn man noch (u) zu (v) werden lässt, die Gleichung:

$$(A_3)\qquad 2\vartheta^4[\varkappa\omega_\xi]((v))=\sum_{i=1}^{i=6}(-1)^{\omega_i|\omega_\xi}\vartheta^4[\varkappa\omega_i]((v)),\qquad(\xi=1,\ldots,6).$$

Jede der drei Gleichungen (A_1), (A_2), (A_3) repräsentirt 16 verschiedene specielle, welche aus ihr entstehen, indem man für $[\varkappa]$ der Reihe nach die sechzehn Normalcharakteristiken eintreten lässt.

Setzt man in der Gleichung (A_2) $(u) = (0)$, so muss, damit nicht linke und rechte Seite gleichzeitig verschwinden, $[\varkappa]$ von $[0]$ verschieden sein und kann daher nach Satz 3. des Art. 2. immer und nur auf eine Weise in vier, von einander verschiedene, ungerade Charakteristiken zerlegt werden. Denkt man sich die Bezeichnung der sechs ungeraden Charakteristiken so gewählt, dass $[\varkappa] \equiv [\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4]$ ist, so besitzen die den Werthen $i = 5$ und $i = 6$ entsprechenden Glieder der rechtsstehenden Summe den Werth Null, und man erhält, wenn man zugleich ξ auf die Zahlen 1, 2, 3, 4 beschränkt, die Formel:

$$(A_4) \qquad 2\,\vartheta^2[\varkappa\omega_\xi](\!(0)\!)\,\vartheta^2[\varkappa\omega_\xi](\!(v)\!) = \sum_{i=1}^{i=4}(-1)^{\omega_i|\omega_\xi}\,\vartheta^2[\varkappa\omega_i](\!(0)\!)\,\vartheta^2[\varkappa\omega_i](\!(v)\!),$$

$$[\varkappa] \equiv [\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4], \qquad \xi = 1, \ldots, 4,$$

und hieraus für $(v) = (0)$ die Formel:

$$(A_5) \qquad 2\,\vartheta^4[\varkappa\omega_\xi](\!(0)\!) = \sum_{i=1}^{i=4}(-1)^{\omega_i|\omega_\xi}\,\vartheta^4[\varkappa\omega_i](\!(0)\!),$$

$$[\varkappa] \equiv [\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4], \qquad \xi = 1, \ldots, 4.$$

Jede der Gleichungen (A_4), (A_5) repräsentirt 15 verschiedene specielle, welche aus ihr entstehen, indem man die vier Charakteristiken $[\omega_1], \ldots, [\omega_4]$ auf alle möglichen Weisen aus den sechs ungeraden Charakteristiken auswählt und dann jedesmal $[\varkappa]$ aus der Gleichung $[\varkappa] \equiv [\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4]$ bestimmt.

Fall B.

Dieser Fall ist dadurch charakterisirt, dass von den beiden Charakteristiken $[\varrho]$, $[\sigma]$ die eine der $[0]$ gleich, die andere von $[0]$ verschieden ist. Ohne der Allgemeinheit Abbruch zu thun, kann man annehmen, dass $[\varrho] = [0]$ sei, indem der Fall, wo $[\sigma] = [0]$ ist, durch Vertauschung von (v) und (w) immer auf den, wo $[\varrho] = [0]$ ist, zurückgeführt werden kann. Entsprechend der Annahme $[\varrho] = [0]$, nimmt dann die Gleichung (Θ), wenn man noch $[\varkappa\sigma] = [\lambda]$, also $[\sigma] \equiv [\varkappa\lambda]$ setzt, die Gestalt:

$$(B_1) \qquad 2\,\vartheta[\varkappa\omega_\xi](\!(u)\!)\,\vartheta[\varkappa\omega_\xi](\!(v)\!)\,\vartheta[\lambda\omega_\xi](\!(w)\!)\,\vartheta[\lambda\omega_\xi](\!(-u+v+w)\!)$$

$$= \sum_{i=1}^{i=6}(-1)^{\omega_i|\omega_\xi}\,.\,(-1)^{(\varkappa\lambda)(\omega_i\omega_\xi)'}\,\vartheta[\varkappa\omega_i](\!(u)\!)\,\vartheta[\varkappa\omega_i](\!(v)\!)\,\vartheta[\lambda\omega_i](\!(w)\!)\,\vartheta[\lambda\omega_i](\!(-u+v+w)\!),$$

$$(\xi = 1, 2, \ldots, 6)$$

an. Aus dieser Formel folgt, wenn man (v) in (u) übergehen lässt, und dann den Buchstaben w durch den Buchstaben v ersetzt, die Gleichung:

$$(B_2) \quad 2\vartheta^2[\varkappa\omega_\xi](\!(u)\!)\,\vartheta^2[\lambda\omega_\xi](\!(v)\!) = \sum_{i=1}^{i=6} (-1)^{\omega_i\,|\,\omega_\xi} . (-1)^{(\varkappa\lambda)(\omega_i\omega_\xi)'}\,\vartheta^2[\varkappa\omega_i](\!(u)\!)\,\vartheta^2[\lambda\omega_i](\!(v)\!),$$

$$(\xi = 1, 2, \ldots, 6).$$

Jede der Formeln (B_1), (B_2) repräsentirt 240 verschiedene specielle, welche aus ihr entstehen, indem man an Stelle von $[\varkappa]$, $[\lambda]$ alle Variationen der sechzehn Normalcharakteristiken zur zweiten Classe ohne Wiederholung treten lässt.

Lässt man in der Gleichung (B_1) (w) zu (u) werden, denkt sich hierauf die Charakteristik $[\varkappa\lambda]$ in vier ungerade Charakteristiken zerlegt und die Bezeichnung der ungeraden Charakteristiken so gewählt, dass $[\varkappa\lambda] \equiv [\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4] \equiv [\omega_5\omega_6]$ wird, beschränkt auch ξ auf die Werthe 1, 2, 3, 4, so unterscheiden sich die beiden, den Werthen $i = 5$ und $i = 6$ entsprechenden Glieder der auf der rechten Seite stehenden Summe nur durch das Vorzeichen und zerstören sich also gegenseitig. Man erhält auf diese Weise die Formel:

$$(B_{2'}) \quad 2\vartheta[\varkappa\omega_\xi](\!(u)\!)\,\vartheta[\varkappa\omega_\xi](\!(v)\!)\,\vartheta[\lambda\omega_\xi](\!(u)\!)\,\vartheta[\lambda\omega_\xi](\!(v)\!)$$

$$= \sum_{i=1}^{i=4} (-1)^{\omega_i\,|\,\omega_\xi} . (-1)^{(\varkappa\lambda)(\omega_i\omega_\xi)'}\,\vartheta[\varkappa\omega_i](\!(u)\!)\,\vartheta[\varkappa\omega_i](\!(v)\!)\,\vartheta[\lambda\omega_i](\!(u)\!)\,\vartheta[\lambda\omega_i](\!(v)\!),$$

$$[\varkappa\lambda] \equiv [\omega_1\varphi_2\omega_3\omega_4], \qquad \xi = 1, \ldots, 4,$$

und hieraus, indem man noch (u) zu (v) werden lässt, die Gleichung:

$$(B_3) \quad 2\vartheta^2[\varkappa\omega_\xi](\!(v)\!)\,\vartheta^2[\lambda\omega_\xi](\!(v)\!) = \sum_{i=1}^{i=4} (-1)^{\omega_i\,|\,\omega_\xi} . (-1)^{(\varkappa\lambda)(\omega_i\omega_\xi)'}\,\vartheta^2[\varkappa\omega_i](\!(v)\!)\,\vartheta^2[\lambda\omega_i](\!(v)\!),$$

$$[\varkappa\lambda] \equiv [\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4], \qquad \xi = 1, \ldots, 4.$$

Jede der Gleichungen $(B_{2'})$, (B_3) repräsentirt 120 verschiedene Gleichungen, welche aus ihr entstehen, indem man an Stelle von $[\varkappa]$, $[\lambda]$ alle Combinationen der sechzehn Normalcharakteristiken zur zweiten Classe ohne Wiederholung treten lässt und zugleich jedesmal mit $[\omega_1], \ldots, [\omega_4]$ die vier ungeraden Charakteristiken bezeichnet, in welche $[\varkappa\lambda]$ zerlegt werden kann.

Setzt man in der Formel (B_2) $(u) = (0)$, so erhält man durch eine Ueberlegung, welche der zur Herstellung der Formel (A_4) angewandten ganz analog ist, die Gleichung:

$$(B_4) \quad 2\vartheta^2[\varkappa\omega_\xi](\!(0)\!)\,\vartheta^2[\lambda\omega_\xi](\!(v)\!) = \sum_{i=1}^{i=4} (-1)^{\omega_i\,|\,\omega_\xi} . (-1)^{(\varkappa\lambda)(\omega_i\omega_\xi)'}\,\vartheta^2[\varkappa\omega_i](\!(0)\!)\,\vartheta^2[\lambda\omega_i](\!(v)\!),$$

$$[\varkappa] \equiv [\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4], \qquad \xi = 1, \ldots, 4.$$

Die letzte Gleichung repräsentirt 225 verschiedene specielle, welche aus ihr hervorgehen, indem man die vier Charakteristiken $[\omega_1], \ldots, [\omega_4]$ auf die fünfzehn möglichen Weisen aus den sechs ungeraden Charakteristiken auswählt, dann $[\varkappa]$ aus der Gleichung $[\varkappa] = [\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4]$ bestimmt und für $[\lambda]$ jedesmal der Reihe nach die fünfzehn von $[\varkappa]$ verschiedenen Charakteristiken setzt.

Sollen in der Formel $(B_{3'})$ nicht alle Glieder verschwinden, wenn $(u) = (0)$ gesetzt wird, so darf zunächst keine der beiden Charakteristiken $[\varkappa]$, $[\lambda]$ der Charakteristik $[0]$ congruent sein; setzt man dann, entsprechend der Zerlegung einer jeden der beiden Charakteristiken $[\varkappa]$, $[\lambda]$ in zwei ungerade, $[\varkappa] \equiv [\omega_\mu \omega_\nu]$, $[\lambda] \equiv [\omega_{\mu'} \omega_{\nu'}]$, so können weder μ, ν noch μ', ν' mit den Zahlen 5, 6 übereinstimmen, da in diesem Falle wegen $[\varkappa\lambda] \equiv [\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4] \equiv [\omega_5 \omega_6]$ eine der beiden Charakteristiken $[\varkappa]$, $[\lambda]$ der $[0]$ congruent wäre. Es dürfen weiter aber auch, wenn nicht alle Glieder von $(B_{3'})$ verschwinden sollen, weder beide Zahlen μ, ν noch beide Zahlen μ', ν' unter den Zahlen $1, \ldots, 4$ vorkommen. Daraus folgt, dass für $(u) = (0)$ nur diejenigen Charakteristiken $[\varkappa]$ zu berücksichtigen sind, die aus der Gleichung $[\varkappa] = [\omega_\mu \omega_\nu]$ hervorgehen, wenn man für μ eine der Zahlen $1, \ldots, 4$, für ν eine der Zahlen 5, 6 setzt. Bei passender Wahl der Bezeichnung der sechs ungeraden Charakteristiken kann man daher $[\varkappa] = [\omega_4 \omega_5]$ setzen, und es folgt dann aus $[\varkappa\lambda] \equiv [\omega_5 \omega_6]$ immer $[\lambda] \equiv [\omega_4 \omega_6]$. Setzt man in der Gleichung $(B_{3'})$ nun $[\varkappa] = [\omega_4 \omega_5]$, $[\lambda] = [\omega_4 \omega_6]$, auch $\xi = 4$, so hat die linke Seite und das dem Werthe $i = 4$ entsprechende Glied der rechten Seite den Werth Null, und man erhält, wenn man noch berücksichtigt, dass:

$$(-1)^{\omega_i, \omega_4} . (-1)^{(\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4)(\omega_i \omega_4)'} = -(-1)^{(\omega_i)(\omega_4)'} . (-1)^{(\omega_1 \omega_2 \omega_3)(\omega_i)'} . (-1)^{(\omega_1 \omega_2 \omega_3)(\omega_4)'}$$

ist, und den allen Gliedern gemeinsamen Factor $-(-1)^{(\omega_1 \omega_2 \omega_3)(\omega_4)'}$ unterdrückt, die bereits von Herrn *Weber**) mitgetheilte Formel:

$$(B_{4'}) \quad \sum_{i=1}^{i=3} (-1)^{(\omega_1 \omega_2 \omega_3)(\omega_i)' + (\omega_i)(\omega_4)'} \vartheta[\omega_i \omega_4 \omega_5]((0)) \vartheta[\omega_i \omega_4 \omega_5]((v)) \vartheta[\omega_i \omega_4 \omega_6]((0)) \vartheta[\omega_i \omega_4 \omega_6]((v)) = 0.$$

Aus dieser letzten Gleichung folgt schliesslich noch für $(v) = (0)$ die Formel:

$$(B_5) \qquad \sum_{i=1}^{i=3} (-1)^{(\omega_1 \omega_2 \omega_3)(\omega_i)' + (\omega_i)(\omega_4)'} \vartheta^2[\omega_i \omega_4 \omega_5]((0)) \, \vartheta^2[\omega_i \omega_4 \omega_6]((0))$$

Jede der Gleichungen $(B_{4'})$, (B_5) repräsentirt 15 verschiedene specielle, welche aus ihr entstehen, indem man die beiden Charakteristiken $[\omega_5]$, $[\omega_6]$ auf die fünfzehn möglichen Weisen aus den sechs ungeraden auswählt und jedesmal die vier übrigen in beliebiger Reihenfolge mit $[\omega_1], \ldots, [\omega_4]$ bezeichnet. Man überzeugt sich leicht, dass die, zwei verschiedenen Anordnungen der mit $[\omega_1], \ldots, [\omega_4]$ zu bezeichnenden Charakteristiken entsprechenden Gleichungen nicht wesentlich verschieden sind, sondern sich nur durch die Bezeichnung der ϑ-Charakteristiken unterscheiden, von denen jede, als gerade Charakteristik, zwei Darstellungen durch je drei ungerade zulässt.

Man kann hier bemerken, dass in Folge der Gleichung:

$$[\omega_1] + [\omega_2] + \ldots + [\omega_6] = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

eine ϑ-Function ungeändert bleibt, wenn man ihre Charakteristik um die Summe der sechs

*) *Weber*, Anwendung der ϑ-Functionen etc. Math. Annalen Bd. XIV. pg. 179. Glchg. (16).

ungeraden Charakteristiken vermehrt. Geschieht dies bei der Function $\vartheta[\omega_1\omega_2\omega_3](\!(v)\!)$, so folgt, unter Berücksichtigung der Relation $\vartheta[\varkappa+2\lambda](\!(v)\!)=(-1)^{(\varkappa)(\lambda)'}\vartheta[\varkappa](\!(v)\!)$ und der Beziehnng $(-1)^{(\omega_1\omega_2\omega_3)(\omega_4\omega_5\omega_6)'}=(-1)^{(\omega_4\omega_5\omega_6)(\omega_1\omega_2\omega_3)'}=+1$, dass

$$\vartheta[\omega_1\omega_2\omega_3](\!(v)\!)=\vartheta[\omega_4\omega_5\omega_6](\!(v)\!)$$

ist, in welcher Reihenfolge auch die ungeraden Charakteristiken mit $[\omega_1],\ldots,[\omega_6]$ bezeichnet sind.

Fall C.

Sind die beiden Charakteristiken $[\varrho]$, $[\sigma]$ von einander und von $[0]$ verschieden, so setze man in der Gleichung (Θ), nachdem man jede der darin vorkommenden ϑ-Functionen mit der Charakteristik $[\varkappa\omega_i\varrho\sigma]$, $i=1,\ldots,6$, unter Ausscheidung des Factors $(-1)^{(\varkappa\omega_i\varrho\sigma)(\varkappa)'}$ in eine solche mit der Charakteristik $[\varkappa\omega_i\varkappa\varrho\varkappa\sigma]$ verwandelt, und linke wie rechte Seite mit $(-1)^{(\varkappa\omega_\xi\varrho\sigma)(\varkappa)'}$ multiplicirt hat, allenthalben $[\varkappa\varrho]=[\lambda]$, $[\varkappa\sigma]=[\mu]$. Die Gleichung (Θ) nimmt dann die Gestalt:

$$(C_1)\quad 2\vartheta[\varkappa\omega_\xi](\!(u)\!)\,\vartheta[\lambda\omega_\xi](\!(v)\!)\,\vartheta[\mu\omega_\xi](\!(w)\!)\,\vartheta[\varkappa\lambda\mu\omega_\xi](\!(-u+v+w)\!)$$

$$=\sum_{i=1}^{i=6}(-1)^{\omega_i\,|\,\omega_\xi}.\,(-1)^{(\lambda\mu)(\omega_i\omega_\xi)'+(\omega_i\omega_\xi)(\varkappa)'}\vartheta[\varkappa\omega_i](\!(u)\!)\vartheta[\lambda\omega_i](\!(v)\!)\vartheta[\mu\omega_i](\!(w)\!)\vartheta[\varkappa\lambda\mu\omega_i](\!(-u+v+w)\!),$$

$$(\xi=1,2,\ldots,6)$$

an. Da für $[\varkappa]$, $[\lambda]$, $[\mu]$ alle Variationen der sechzehn Normalcharakteristiken zur dritten Classe ohne Wiederholung gesetzt werden können, so repräsentirt diese Gleichung im Ganzen 3360 verschiedene specielle.

Lässt man in (C_1) (v) zu (u) werden und wendet hierauf dieselben Schlüsse an, die zur Herstellung der Gleichung (B_Y) benutzt wurden, so erhält man, wenn man schliesslich noch an Stelle des Buchstabens w den Buchstaben v treten lässt, die Formel:

$$(C_2)\quad 2\vartheta[\varkappa\omega_\xi](\!(u)\!)\,\vartheta[\lambda\omega_\xi](\!(u)\!)\,\vartheta[\mu\omega_\xi](\!(v)\!)\,\vartheta[\varkappa\lambda\mu\omega_\xi](\!(v)\!)$$

$$=\sum_{i=1}^{i=4}(-1)^{\omega_i\,|\,\omega_\xi}.\,(-1)^{(\lambda\mu)(\omega_i\omega_\xi)'+(\omega_i\omega_\xi)(\varkappa)'}\vartheta[\varkappa\omega_i](\!(u)\!)\,\vartheta[\lambda\omega_i](\!(u)\!)\,\vartheta[\mu\omega_i](\!(v)\!)\,\vartheta[\varkappa\lambda\mu\omega_i](\!(v)\!),$$

$$[\varkappa\lambda]=[\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4],\qquad \xi=1,\ldots,4.$$

Setzt man hierin an Stelle von $[\varkappa]$, $[\lambda]$ alle Combinationen der sechzehn Normalcharakteristiken zur zweiten Classe ohne Wiederholung, so entstehen einhundertzwanzig verschiedene Gleichungen, und es können in jeder derselben für $[\mu]$ noch die vierzehn von $[\varkappa]$ und $[\lambda]$ jedesmal verschiedenen Normalcharakteristiken eintreten. Berücksichtigt man jedoch, dass, wenn eine beliebige dieser vierzehn Charakteristiken mit $[\mu']$ bezeichnet wird, dann immer eine zweite der Charakteristik $[\varkappa\lambda\mu']$ congruent ist, und dass zwei solche Charakteristiken an Stelle von $[\mu]$ gesetzt, dieselbe Gleichung hervor-

bringen, so folgt, dass die Anzahl der in (C_2) enthaltenen speciellen Gleichungen 840 beträgt.

Zur Herleitung einer Relation zwischen Producten von je vier ϑ-Functionen mit verschiedenen Charakteristiken, aber gleichen Argumenten (v), lasse man in der Gleichung (C_2) (u) in (v) übergehen und denke sich gleichzeitig $[\lambda]$ in die Form $[\varkappa\varrho]$, $[\mu]$ in die Form $[\varkappa\sigma]$ gebracht, auch jede der so entstehenden ϑ-Functionen mit der Charakteristik $[\varkappa\varkappa\varrho\varkappa\sigma\omega_i]$, $i = 1, \ldots, 6$, unter Ausscheidung des Factors $(-1)^{(\varkappa\varrho\sigma\omega_i)(\varkappa)'}$ in eine solche mit der Charakteristik $[\varkappa\varrho\sigma\omega_i]$ verwandelt. In Folge der oben für $[\varkappa]$, $[\lambda]$, $[\mu]$ gesetzten Bedingungen muss dann $[\varrho] \equiv [\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4] \equiv [\omega_5\omega_6]$ und $[\sigma]$ sowohl von $[0]$, als von $[\varrho]$ verschieden sein. Setzt man also, entsprechend der Zerlegung von $[\sigma]$ in zwei ungerade Charakteristiken, $[\sigma] = [\omega_\mu\omega_\nu]$, so können, weil $[\varrho] = [\omega_5\omega_6]$ ist, μ, ν nicht mit den Zahlen 5, 6 übereinstimmen. Man überzeugt sich weiter leicht, dass auch die Zahlen μ, ν nicht beide unter den Zahlen 1, 2, 3, 4 vorkommen dürfen, wenn nicht die vier Glieder der Gleichung paarweise bis auf das Vorzeichen übereinstimmen, sich also gegenseitig zerstören sollen. Daraus folgt, dass für $[\sigma]$ nur solche Charakteristiken zu berücksichtigen sind, die aus der Gleichung $[\sigma] = [\omega_\mu\omega_\nu]$ hervorgehen, wenn man für μ eine der Zahlen $1, \ldots, 4$, für ν eine der Zahlen 5, 6 setzt. Bei passender Wahl der Bezeichnung der ungeraden Charakteristiken kann man daher immer $[\sigma] = [\omega_4\omega_5]$ setzen. Führt man nun in der in oben angegebener Weise umgeformten Gleichung (C_2) an Stelle von $[\varrho]$ die Charakteristik $[\omega_5\omega_6]$, an Stelle von $[\sigma]$ die Charakteristik $[\omega_4\omega_5]$ ein und vereinigt mit Hülfe der in Art. 3. gegebenen Relationen die auftretenden Exponentialgrössen in passender Weise, so erhält man zunächst die Gleichung:

$$\sum_{i=1}^{i=4} (-1)^{(\omega_1\omega_2\omega_3)(\omega_i)'}\,\vartheta[\varkappa\omega_i]((v))\,\vartheta[\varkappa\omega_i\omega_5\omega_6]((v))\,\vartheta[\varkappa\omega_i\omega_4\omega_5]((v))\,\vartheta[\varkappa\omega_i\omega_4\omega_6]((v)) = 0.$$

In dieser Gleichung kann für $[\varkappa]$ jede der sechzehn verschiedenen Charakteristiken gesetzt werden; es verdient aber hervorgehoben zu werden, dass die auf diese Weise entstehenden Gleichungen nicht wesentlich von einander verschieden sind, da durch Uebergang von einer Charakteristik $[\varkappa]$ zu einer anderen entweder nur eine Umstellung der vier Factoren in jedem ϑ-Producte, oder eine Vertauschung der ϑ-Producte gegeneinander, unter Hinzutritt eines allen Gliedern gemeinsamen Factors, oder endlich beides bewirkt wird. Man kann daher unbeschadet der Allgemeinheit der obigen Formel in derselben $[\varkappa] = [0]$ setzen und erhält dann die Gleichung:

$$(C_3) \qquad \sum_{i=1}^{i=4} (-1)^{(\omega_1\omega_2\omega_3)(\omega_i)'}\,\vartheta[\omega_i]((v))\,\vartheta[\omega_i\omega_5\omega_6]((v))\,\vartheta[\omega_i\omega_4\omega_5]((v))\,\vartheta[\omega_i\omega_4\omega_6]((v)) = 0.$$

Diese Gleichung repräsentirt 20 verschiedene specielle, welche aus ihr erhalten werden, indem man die drei Charakteristiken $[\omega_1]$, $[\omega_2]$, $[\omega_3]$ auf die zwanzig möglichen Weisen aus den sechs ungeraden Charakteristiken auswählt; in welcher Reihenfolge die drei übrigen Charakteristiken mit $[\omega_4]$, $[\omega_5]$, $[\omega_6]$ bezeichnet werden, ist, wie man sich leicht überzeugt, gleichgiltig.

Setzt man in der Gleichung (C_2) $(u) = (0)$, so erhält man nach einer Ueberlegung, welche der zur Herstellung der Gleichung $(B_{4'})$ angewandten ganz ähnlich ist, nach einigen leichten Umformungen die Gleichung:

$$(C_4) \qquad \sum_{i=1}^{i=3} (-1)^{(\mu\,\omega_1\,\omega_2\,\omega_3)\,(\omega_i)'}\,\vartheta[\omega_i\,\omega_4\,\omega_5](\!(0)\!)\,\vartheta[\omega_i\,\omega_4\,\omega_6](\!(0)\!)\,\vartheta[\mu\,\omega_i](\!(v)\!)\,\vartheta[\mu\,\omega_i\,\omega_5\,\omega_6](\!(v)\!) = 0,$$

die für $[\mu] = [0]$ schon von Herrn *Weber**) aufgestellt worden ist. Die Gleichung (C_4) repräsentirt bei festgehaltener Charakteristik $[\mu]$ fünfzehn verschiedene specielle, welche aus ihr entstehen, indem man die beiden Charakteristiken $[\omega_5]$, $[\omega_6]$ auf die fünfzehn möglichen Weisen aus den sechs ungeraden auswählt und die vier übrigen jedesmal in beliebiger Reihenfolge mit $[\omega_1], \ldots, [\omega_4]$ bezeichnet, auch hiezu das bei Formel $(B_{4'})$ Bemerkte beachtet. Lässt man sodann an Stelle von $[\mu]$ alle vierzehn von $[\omega_4\,\omega_5]$ und $[\omega_4\,\omega_6]$ verschiedenen Charakteristiken treten, berücksichtigt dabei, dass, wenn eine beliebige dieser vierzehn Charakteristiken mit $[\mu']$ bezeichnet wird, dann eine zweite der Charakteristik $[\mu'\,\omega_5\,\omega_6]$ congruent ist, und dass zwei solche Charakteristiken, an Stelle von $[\mu]$ gesetzt, dieselbe Gleichung hervorbringen, so folgt, dass die Anzahl der in (C_4) enthaltenen speciellen Gleichungen 105 beträgt.

Setzt man in der Gleichung (C_4) $[\mu] = [\varkappa\,\omega_4]$, so erhält dieselbe nach einfacher Umformung die Gestalt:

$$\begin{aligned}(C'_4) \qquad & \vartheta[\omega_5\,\omega_1\,\omega_4](\!(0)\!)\,\vartheta[\omega_5\,\omega_2\,\omega_3](\!(0)\!)\,\vartheta[\varkappa\,\omega_1\,\omega_4](\!(v)\!)\,\vartheta[\varkappa\,\omega_2\,\omega_3](\!(v)\!) \\ & = (-1)^{(\omega_5\,\omega_4)(\omega_1\,\omega_2)'}\,\vartheta[\omega_5\,\omega_2\,\omega_4](\!(0)\!)\,\vartheta[\omega_5\,\omega_1\,\omega_3](\!(0)\!)\,\vartheta[\varkappa\,\omega_2\,\omega_4](\!(v)\!)\,\vartheta[\varkappa\,\omega_1\,\omega_3](\!(v)\!) \\ & + (-1)^{(\omega_5\,\omega_4)(\omega_1\,\omega_3)'}\,\vartheta[\omega_5\,\omega_3\,\omega_4](\!(0)\!)\,\vartheta[\omega_5\,\omega_1\,\omega_2](\!(0)\!)\,\vartheta[\varkappa\,\omega_3\,\omega_4](\!(v)\!)\,\vartheta[\varkappa\,\omega_1\,\omega_2](\!(v)\!),\end{aligned}$$

in welcher sie später zur Verwendung kommen wird.

Da für $(v) = (0)$ sämmtliche Glieder der Gleichung (C_3) verschwinden, so existirt keine Relation zwischen Producten von je vier Grössen $\vartheta[\varepsilon](\!(0)\!)$ mit verschiedenen Charakteristiken $[\varepsilon]$.

13.

Einige der unter (A), (B), (C) aufgeführten Formeln verdienen theils wegen ihrer Structur, theils wegen ihrer späteren Anwendung besondere Beachtung und sollen daher jetzt eingehender besprochen werden.

Die Formeln (A_2), (B_2), $(B_{2'})$, (C_2) können, da man alle weiteren Relationen aus ihnen durch Specialisirung der Argumente, ohne auf die Formeln (A_1), (B_1), (C_1) zurückgehen zu müssen, erhält, als die Fundamentalformeln angesehen werden; berücksichtigt man dann noch, dass (B_2) die Formel (A_2) als speciellen Fall enthält, wenn $[\lambda] = [\varkappa]$ zugelassen wird, ebenso (C_2) die Formel $(B_{2'})$ für $[\mu] = [\varkappa]$, so folgt, dass die beiden Formeln (B_2), (C_2) zur Herstellung aller weiteren ausreichen.

*) *Weber*, Anwendung der Thetafunctionen etc. Math. Annalen Bd. XIV. pg. 179. Glchg. (15) und: Ueber die *Kummer*'sche Fläche etc. Crelle's Journal Bd. 84. pg. 336. Glchg. (B).

Die Gleichungen (A_3), (B_3), (C_3) sind von den später folgenden Relationen zwischen ϑ-Functionen mit denselben Argumenten dadurch ausgezeichnet, dass sie in Bezug auf die Functionen $\vartheta[\varepsilon]((v))$ vom vierten Grade sind und keine Grössen $\vartheta[\varepsilon]((0))$ enthalten. Unter ihnen verdient die Formel (C_3) besondere Berücksichtigung. Die vier Charakteristiken eines jeden der vier in (C_3) vorkommenden ϑ-Producte bilden nämlich ein Vierersystem zweiter Art, und es enthalten weiter die vier den vier Producten entsprechenden Vierersysteme zusammen alle sechzehn Charakteristiken. Auch zeigt eine einfache Ueberlegung, dass die zwanzig in (C_3) enthaltenen speciellen Gleichungen den zwanzig in der Tabelle II. vorkommenden, jedesmal alle sechzehn Charakteristiken enthaltenden Gruppen von je vier Vierersystemen zweiter Art entsprechen. Einige der aus (B_3) folgenden speciellen Gleichungen finden sich schon bei *Göpel**), die zwanzig in (C_3) enthaltenen Gleichungen erwähnt *Rosenhain***).

Die Gleichungen (A_4), (B_4), $(B_{4'})$, (C_4), von denen (A_4) als specieller Fall von (B_4), $(B_{4'})$ als specieller Fall von (C_4) aufgefasst werden kann, repräsentiren Relationen zweiten Grades zwischen den sechzehn Functionen $\vartheta[\varepsilon]((v))$. Die Formeln (A_4), (B_4) zeigen, dass zwischen je vier ϑ-Quadraten, deren Charakteristiken einem und demselben Sechsersysteme entnommen sind, eine homogene lineare Relation mit constanten Coefficienten besteht. Bezüglich der Formeln $(B_{4'})$, (C_4) verdient Folgendes hervorgehoben zu werden. Bezeichnet man ein ϑ-Product $\vartheta[\varepsilon]((v))\,\vartheta[\eta]((v))$ als zur Charakteristik $[\varkappa]$ gehörig, wenn $[\varepsilon]+[\eta]\equiv[\varkappa]$ ist, so gehören zu jeder, von $[0]$ verschiedenen Charakteristik $[\varkappa]$ acht verschiedene ϑ-Producte, von denen immer vier gerade, vier ungerade Functionen des Argumentensystemes (v) sind. Ein Blick auf die Formel (C_4) zeigt nun, dass die drei in ihr vorkommenden ϑ-Producte zu derselben von $[0]$ verschiedenen Charakteristik $[\omega_5\omega_6]$ gehören, und man kann daher entsprechend den fünfzehn von $[0]$ verschiedenen Charakteristiken, denen $[\omega_5\omega_6]$ congruent werden kann, die einhundertzwanzig in (C_4) enthaltenen speciellen Gleichungen in fünfzehn Gruppen eintheilen, von denen jede dann acht Gleichungen enthält. Die drei in einer solchen Gleichung vorkommenden ϑ-Producte sind entweder sämmtlich gerade oder sämmtlich ungerade Functionen, und man erkennt weiter, dass sowohl zwischen je drei von den vier geraden, wie zwischen je drei von den vier ungeraden, zur Charakteristik $[\varkappa]$ gehörigen ϑ-Producten eine der acht Gleichungen der durch die Charakteristik $[\varkappa]$ fixirten Gruppe besteht. Von grosser Bedeutung für die späteren Untersuchungen ist endlich der Umstand, dass die vier Charakteristiken von irgend zwei der drei in derselben Gleichung vorkommenden ϑ-Producte ein Vierersystem erster Art bilden.

Die Formeln (A_5), (B_5) liefern die bekannten Relationen zwischen den zehn von Null verschiedenen Grössen $\vartheta[\varepsilon]((0))$.

14.

Die in den Formelsystemen (A), (B), (C) enthaltenen speciellen Gleichungen sind theilweise von einander abhängig. Im Folgenden soll die Art dieser Abhängig-

*) *Göpel*, Theoriae transcendentium Abelianarum etc. Crelle's Journal Bd. 35. pg. 293.

**) *Rosenhain*, Mémoire sur les fonctions etc. pg. 425.

keit untersucht und die Reduction der Gleichungen auf eine kleinste Zahl von einander unabhängiger durchgeführt werden. Die betreffende Untersuchung wird sich aber auf die in (A_5), (B_5) enthaltenen Relationen zwischen den zehn von Null verschiedenen Grössen $\vartheta[\varepsilon](\!(0)\!)$ und auf die aus (A_4), (B_4) und aus $(B_{4'})$, (C_4) folgenden ϑ-Formeln beschränken dürfen, da man von diesen, wenn man sie nicht nur für das Variablensystem (v), sondern auch für das Variablensystem (u) aufgestellt denkt, rückwärts zu den Grundformeln (B_2), (C_2) gelangen kann.

Von den fünfzehn in (A_5) enthaltenen speciellen Gleichungen sind zunächst die neun, welche geraden Charakteristiken $[\varkappa]$ entsprechen, eine Folge der sechs übrigen. Schreibt man diese letzteren — indem man $\vartheta[\omega_\lambda \omega_\mu \omega_\nu](\!(0)\!)$ zur Abkürzung mit $[\lambda \mu \nu]$ bezeichnet, auch entsprechend $(-1)^{\omega_\lambda | \omega_\mu}$ durch $(-1)^{\lambda | \mu}$ ersetzt — in der Form:

$$
\text{(I)}\qquad
\begin{aligned}
{[123]^4} &= (-1)^{1|4}\,[234]^4 + (-1)^{2|4}\,[134]^4 + (-1)^{3|4}\,[124]^4,\\
{[123]^4} &= (-1)^{1|5}\,[235]^4 + (-1)^{2|5}\,[135]^4 + (-1)^{3|5}\,[125]^4,\\
{[123]^4} &= (-1)^{1|6}\,[236]^4 + (-1)^{2|6}\,[136]^4 + (-1)^{3|6}\,[126]^4,\\[4pt]
{[123]^4} &= (-1)^{1|4}\,[234]^4 + (-1)^{1|5}\,[235]^4 + (-1)^{1|6}\,[236]^4,\\
{[123]^4} &= (-1)^{2|4}\,[134]^4 + (-1)^{2|5}\,[135]^4 + (-1)^{2|6}\,[136]^4,\\
{[123]^4} &= (-1)^{3|4}\,[124]^4 + (-1)^{3|5}\,[125]^4 + (-1)^{2|6}\,[126]^4,
\end{aligned}
$$

so erkennt man weiter, dass auch sie nicht unabhängig sind, dass vielmehr jede von ihnen durch lineare Verbindung der fünf übrigen erhalten werden kann.

Bezeichnet man, wie vorher, $\vartheta[\omega_\lambda \omega_\mu \omega_\nu](\!(0)\!)$ mit $[\lambda \mu \nu]$ und ersetzt weiter noch $(-1)^{(\omega_\varkappa \omega_\lambda)(\omega_\mu \omega_\nu)'}$ durch $(-1)^{\varkappa\lambda \,.\, \mu\nu'}$, so nehmen die fünfzehn in (B_5) enthaltenen speciellen Gleichungen die Gestalt:

$$
\text{(II)}\qquad
\begin{aligned}
{[235]^2}\,[236]^2 &= (-1)^{13.24'}\,[125]^2\,[126]^2 + (-1)^{12.34'}\,[135]^2\,[136]^2,\\
{[236]^2}\,[234]^2 &= (-1)^{12.25'}\,[126]^2\,[124]^2 + (-1)^{12.35'}\,[136]^2\,[134]^2,\\
{[234]^2}\,[235]^2 &= (-1)^{13.26'}\,[124]^2\,[125]^2 + (-1)^{12.36'}\,[134]^2\,[135]^2,\\[4pt]
{[124]^2}\,[134]^2 &= (-1)^{45.16'}\,[125]^2\,[135]^2 + (-1)^{46.15'}\,[126]^2\,[136]^2,\\
{[124]^2}\,[234]^2 &= (-1)^{45.26'}\,[125]^2\,[235]^2 + (-1)^{46.25'}\,[126]^2\,[236]^2,\\
{[134]^2}\,[234]^2 &= (-1)^{45.36'}\,[135]^2\,[235]^2 + (-1)^{46.35'}\,[136]^2\,[236]^2,\\[4pt]
{[123]^2}\,[124]^2 &= (-1)^{25.16'}\,[135]^2\,[236]^2 + (-1)^{26.15'}\,[136]^2\,[235]^2,\\
{[123]^2}\,[125]^2 &= (-1)^{26.14'}\,[136]^2\,[234]^2 + (-1)^{24.16'}\,[134]^2\,[236]^2,\\
{[123]^2}\,[126]^2 &= (-1)^{24.15'}\,[134]^2\,[235]^2 + (-1)^{25.14'}\,[135]^2\,[234]^2,\\[4pt]
{[123]^2}\,[234]^2 &= (-1)^{35.26'}\,[125]^2\,[136]^2 + (-1)^{36.25'}\,[126]^2\,[135]^2,\\
{[123]^2}\,[235]^2 &= (-1)^{36.24'}\,[126]^2\,[134]^2 + (-1)^{34.26'}\,[124]^2\,[136]^2,\\
{[123]^2}\,[236]^2 &= (-1)^{34.25'}\,[124]^2\,[135]^2 + (-1)^{35.24'}\,[125]^2\,[134]^2,
\end{aligned}
$$

$$[123]^2\,[134]^2 = (-1)^{35\cdot 16'}\,[125]^2\,[236]^2 + (-1)^{36\cdot 15'}\,[126]^2\,[235]^2,$$

$$[123]^2\,[135]^2 = (-1)^{36\cdot 14'}\,[126]^2\,[234]^2 + (-1)^{34\cdot 16'}\,[124]^2\,[236]^2,$$

$$[123]^2\,[136]^2 = (-1)^{34\cdot 15'}\,[124]^2\,[235]^2 + (-1)^{35\cdot 14'}\,[125]^2\,[234]^2$$

an. Die Systeme (I), (II) stehen in dem Zusammenhange, dass aus den Gleichungen (II) die Relationen (I) abgeleitet werden können. Die fünfzehn Gleichungen (II) selbst sind aber auch nicht unabhängig von einander, vielmehr kann man auf mehrere Weisen sechs unabhängige unter ihnen auswählen, auf die sich die neun übrigen reduciren lassen. Solche sechs Gleichungen bestimmen dann die sämmtlichen zwischen den zehn von Null verschiedenen Grössen $\vartheta[\varepsilon]((0))$ bestehenden Beziehungen.

Für die Discussion der Formeln (A_4), (B_4) berücksichtige man, dass die vier Charakteristiken eines Vierersystems zweiter Art bei passender Wahl der Bezeichnung der sechs ungeraden Charakteristiken immer in die Form $[\varkappa\omega_1]$, $[\varkappa\omega_2]$, $[\varkappa\omega_3]$, $[\varkappa\omega_1\omega_2\omega_3]$ gebracht werden können, dass also irgend drei von diesen vier Charakteristiken in einem und demselben *Rosenhain*'schen Sechsersysteme sich finden. Durch die vier Combinationen dieser vier Charakteristiken zu je dreien werden daher vier der sechzehn Sechsersysteme bestimmt; die zwölf in diesen Systemen ausserdem noch vorkommenden Charakteristiken sind, wie man sich leicht überzeugt, sämmtlich von einander verschieden und stimmen daher nothwendig mit den zwölf von $[\varkappa\omega_1]$, $[\varkappa\omega_2]$, $[\varkappa\omega_3]$, $[\varkappa\omega_1\omega_2\omega_3]$ verschiedenen Charakteristiken überein. Da aber die Formeln (A_4), (B_4) für je vier ϑ-Quadrate, deren Charakteristiken einem und demselben Sechsersysteme angehören, eine homogene lineare Relation liefern, so lassen sich aus ihnen zwölf Gleichungen ableiten, welche durch die vier ϑ-Quadrate $\vartheta^2[\varkappa\omega_1]((v))$, $\vartheta^2[\varkappa\omega_2]((v))$, $\vartheta^2[\varkappa\omega_3]((v))$, $\vartheta^2[\varkappa\omega_1\omega_2\omega_3]((v))$ die zwölf übrigen linear ausdrücken. Diese zwölf Gleichungen haben, wenn man unter Beibehaltung der oben eingeführten abgekürzten Schreibweise noch $\vartheta[\varkappa\omega_\varrho\omega_\sigma\omega_\tau]((v))$ durch $\vartheta[\varkappa\varrho\sigma\tau]$ bezeichnet, die Form:

$$[123]^2\vartheta^2[\varkappa 4] = (-1)^{\varkappa 23\cdot 14'}[234]^2\vartheta^2[\varkappa 1] + (-1)^{\varkappa 13\cdot 24'}[134]^2\vartheta^2[\varkappa 2] + (-1)^{\varkappa 12\cdot 34'}[124]^2\vartheta^2[\varkappa 3],$$

$$[123]^2\vartheta^2[\varkappa 5] = (-1)^{\varkappa 23\cdot 15'}[235]^2\vartheta^2[\varkappa 1] + (-1)^{\varkappa 13\cdot 25'}[135]^2\vartheta^2[\varkappa 2] + (-1)^{\varkappa 12\cdot 35'}[125]^2\vartheta^2[\varkappa 3],$$

$$[123]^2\vartheta^2[\varkappa 6] = (-1)^{\varkappa 22\cdot 16'}[236]^2\vartheta^2[\varkappa 1] + (-1)^{\varkappa 13\cdot 26'}[136]^2\vartheta^2[\varkappa 2] + (-1)^{\varkappa 12\cdot 36'}[126]^2\vartheta^2[\varkappa 3],$$

(III)

$$[123]^2\vartheta^2[\varkappa 124] = (-1)^{\varkappa\cdot 34'}\,[124]^2\vartheta^2[\varkappa 123] + (-1)^{\varkappa 23\cdot 24'}[134]^2\vartheta^2[\varkappa 1] + (-1)^{\varkappa 12\cdot 14'}[234]^2\vartheta^2[\varkappa 2],$$

$$[123]^2\vartheta^2[\varkappa 125] = (-1)^{\varkappa\cdot 35'}\,[125]^2\vartheta^2[\varkappa 123] + (-1)^{\varkappa 23\cdot 25'}[135]^2\vartheta^2[\varkappa 1] + (-1)^{\varkappa 13\cdot 15'}[235]^2\vartheta^2[\varkappa 2],$$

$$[123]^2\vartheta^2[\varkappa 126] = (-1)^{\varkappa\cdot 36'}\,[126]^2\vartheta^2[\varkappa 123] + (-1)^{\varkappa 23\cdot 26'}[136]^2\vartheta^2[\varkappa 1] + (-1)^{\varkappa 13\cdot 16'}[236]^2\vartheta^2[\varkappa 2],$$

$$[123]^2\vartheta^2[\varkappa 134] = (-1)^{\varkappa\cdot 24'}\,[134]^2\vartheta^2[\varkappa 123] + (-1)^{\varkappa 23\cdot 34'}[124]^2\vartheta^2[\varkappa 1] + (-1)^{\varkappa 12\cdot 14'}[234]^2\vartheta^2[\varkappa 3],$$

$$[123]^2\vartheta^2[\varkappa 135] = (-1)^{\varkappa\cdot 25'}\,[135]^2\vartheta^2[\varkappa 123] + (-1)^{\varkappa 23\cdot 35'}[125]^2\vartheta^2[\varkappa 1] + (-1)^{\varkappa 12\cdot 15'}[235]^2\vartheta^2[\varkappa 3],$$

$$[123]^2\vartheta^2[\varkappa 136] = (-1)^{\varkappa\cdot 26'}\,[136]^2\vartheta^2[\varkappa 123] + (-1)^{\varkappa 23\cdot 36'}[126]^2\vartheta^2[\varkappa 1] + (-1)^{\varkappa 12\cdot 16'}[236]^2\vartheta^2[\varkappa 3],$$

$$[123]^2\vartheta^2[\varkappa 234] = (-1)^{\varkappa\cdot 14'}[234]^2\vartheta^2[\varkappa 123] + (-1)^{\varkappa 13.34'}[124]^2\vartheta^2[\varkappa 2] + (-1)^{\varkappa 12.24}[134]^2\vartheta^2[\varkappa 3],$$

$$[123]^2\vartheta^2[\varkappa 235] = (-1)^{\varkappa\cdot 15'}[235]^2\vartheta^2[\varkappa 123] + (-1)^{\varkappa 13.35'}[125]^2\vartheta^2[\varkappa 2] + (-1)^{\varkappa 12.25}[135]^2\vartheta^2[\varkappa 3],$$

$$[123]^2\vartheta^2[\varkappa 236] = (-1)^{\varkappa\cdot 16'}[236]^2\vartheta^2[\varkappa 123] + (-1)^{\varkappa 13.36'}[126]^2\vartheta^2[\varkappa 2] + (-1)^{\varkappa 12.26'}[136]^2\vartheta^2[\varkappa 3]$$

und ersetzen, unter Berücksichtigung der Relationen (I), (II), die sämmtlichen zweihundertvierzig in (A_4), (B_4) enthaltenen speciellen Gleichungen. Es mag hier bemerkt werden, dass aus der in Art. 17. auftretenden Gleichung (P') sich ohne Mühe eine Formel ableiten lässt, welche die zwölf in dem Systeme (III) vorkommenden Gleichungen umfasst. Zu dem Ende setze man in der Formel (P') $[\omega] = [\omega_0]$, $[\sigma] = [\varkappa\mu\omega_0]$, unter $[\mu]$ eine willkürliche Charakteristik verstanden, ferner $(v) = (0)$ und hierauf endlich $(u) = (v)$; man erhält dann die gewünschte Formel in der Gestalt:

$$\vartheta^2[\omega_0]((0))\,\vartheta^2[\varkappa\mu]((v)) = \sum_{i=0}^{i=3}(-1)^{(\varkappa\omega_0\omega_i)(\mu\omega_i)'}\,\vartheta^2[\mu\omega_0\omega_i]((0))\,\vartheta^2[\varkappa\omega_i]((v)),$$

wobei $[\omega_0]$ die Summe der drei Charakteristiken $[\omega_1]$, $[\omega_2]$, $[\omega_3]$ bezeichnet, also $[\omega_0] = [\omega_1\omega_2\omega_3]$ ist. Diese Formel ist im Wesentlichen mit der Formel (13) des Herrn *Weber**), von der die gleichzeitig mitgetheilten Formeln (12), (14), sowie die in einer anderen Abhandlung**) gegebenen Formeln (A), (A') specielle Fälle sind, identisch.

Was endlich die einhundertzwanzig in $(B_{4'})$, (C_4) enthaltenen speciellen Gleichungen betrifft, so kann man aus jeder derselben durch zweimaliges, in passender Weise ausgeführtes Quadriren eine Relation vierten Grades zwischen den Quadraten der sechs in ihr vorkommenden ϑ-Functionen ableiten. Die einhundertzwanzig auf diese Weise entstehenden Gleichungen liefern aber, wenn man die in ihnen vorkommenden ϑ-Quadrate mit Hülfe der Gleichungen (III) durch die vier ϑ-Quadrate $\vartheta^2[\varkappa 1]$, $\vartheta^2[\varkappa 2]$, $\vartheta^2[\varkappa 3]$, $\vartheta^2[\varkappa 123]$ ausdrückt, auch die Relationen (I), (II) berücksichtigt, immer dieselbe Gleichung vierten Grades zwischen diesen vier ϑ-Quadraten und können daher mit Hülfe der Gleichungen (I), (II), (III) immer auf eine einzige unter ihnen reducirt werden. Die Herstellung der Gleichung vierten Grades zwischen $\vartheta^2[\varkappa 1]$, $\vartheta^2[\varkappa 2]$, $\vartheta^2[\varkappa 3]$, $\vartheta^2[\varkappa 123]$, die also in Verbindung mit den Gleichungen (I), (II), (III) in gewissem Sinne die sämmtlichen einhundertzwanzig Relationen $(B_{4'})$, (C_4) ersetzt, soll jetzt durchgeführt werden.

Zu dem Ende gehe man von der Formel (C_4) aus und bringe dieselbe, indem man $[\mu] = [\varkappa]$ setzt und ähnliche Abkürzungen wie oben anwendet, in die Form:

$$(-1)^{\varkappa 123.1'}[145]\,[146]\,\vartheta[\varkappa 1]\,\vartheta[\varkappa 156] + (-1)^{\varkappa 123.2'}[245]\,[246]\,\vartheta[\varkappa 2]\,\vartheta[\varkappa 256]$$
$$+ (-1)^{\varkappa 123.3'}[345]\,[346]\,\vartheta[\varkappa 3]\,\vartheta[\varkappa 356] = 0.$$

*) *Weber*, Anwendung der Thetafunctionen etc. Math. Annalen Bd. XIV. pg. 178.

**) *Weber*, Ueber die Kummer'sche Fläche etc. Crelle's Journal Bd. 84. pg. 334. In der Formel (A') ist wohl in Folge eines Druckfehlers $\vartheta^2[\omega + \beta_i](v_1, v_2)$ an Stelle von $\vartheta^2[\beta_0 + \beta_i](v_1, v_2)$ gesetzt worden.

Quadrirt man diese letzte Formel in passender Weise zweimal nacheinander und berücksichtigt, dass, wenn $[\varepsilon] \equiv [\eta]$ ist, stets die Beziehung $\vartheta^2[\varepsilon]((v)) = \vartheta^2[\eta]((v))$ besteht, so erhält man die Gleichung:

$$\begin{aligned}
&[235]^4[236]^4\,\vartheta^4[\varkappa 1]\,\vartheta^4[\varkappa 234] + [135]^4[136]^4\,\vartheta^4[\varkappa 2]\,\vartheta^4[\varkappa 134] + [125]^4[126]^4\,\vartheta^4[\varkappa 3]\,\vartheta^4[\varkappa 124] \\
&\qquad - 2\ [235]^2[236]^2[135]^2[136]^2\,\vartheta^2[\varkappa 1]\,\vartheta^2[\varkappa 2]\,\vartheta^2[\varkappa 234]\,\vartheta^2[\varkappa 134] \\
&\qquad - 2\ [135]^2[136]^2[125]^2[126]^2\,\vartheta^2[\varkappa 2]\,\vartheta^2[\varkappa 3]\,\vartheta^2[\varkappa 134]\,\vartheta^2[\varkappa 124] \\
&\qquad - 2\ [125]^2[126]^2[235]^2[236]^2\,\vartheta^2[\varkappa 3]\,\vartheta^2[\varkappa 1]\,\vartheta^2[\varkappa 124]\,\vartheta^2[\varkappa 234] = 0,
\end{aligned}$$

in der man jetzt $\vartheta^2[\varkappa 234]$, $\vartheta^2[\varkappa 134]$, $\vartheta^2[\varkappa 124]$ aus dem Gleichungensysteme (III) durch $\vartheta^2[\varkappa 1]$, $\vartheta^2[\varkappa 2]$, $\vartheta^2[\varkappa 3]$, $\vartheta^2[\varkappa 123]$ ersetzen kann. Geschieht dies, so erhält man nach passender Vereinigung der zusammengehörigen Glieder, wenn man noch zur Abkürzung:

$$[234][235][236] = c_1, \qquad [134][135][136] = c_2, \qquad [124][125][126] = c_3$$

setzt, die gewünschte Relation vierten Grades zwischen $\vartheta^2[\varkappa 1]$, $\vartheta^2[\varkappa 2]$, $\vartheta^2[\varkappa 3]$, $\vartheta^2[\varkappa 123]$ in der Form:

$$\text{(IV)}\quad \begin{aligned}
&c_1^4\left(\vartheta^4[\varkappa 123]\,\vartheta^4[\varkappa 1] + \vartheta^4[\varkappa 2]\,\vartheta^4[\varkappa 3]\right) + c_2^4\left(\vartheta^4[\varkappa 123]\,\vartheta^4[\varkappa 2] + \vartheta^4[\varkappa 1]\,\vartheta^4[\varkappa 3]\right) \\
&\qquad + c_3^4\left(\vartheta^4[\varkappa 123]\,\vartheta^4[\varkappa 3] + \vartheta^4[\varkappa 1]\,\vartheta^4[\varkappa 2]\right) \\
&\qquad - 2\,(-1)^{\varkappa.12'}\,c_1^2c_2^2\,\vartheta^2[\varkappa 1]\,\vartheta^2[\varkappa 2]\left(\vartheta^4[\varkappa 123] + (-1)^{1|2}\,\vartheta^4[\varkappa 3]\right) \\
&\qquad - 2\,(-1)^{\varkappa.23'}\,c_2^2c_3^2\,\vartheta^2[\varkappa 2]\,\vartheta^2[\varkappa 3]\left(\vartheta^4[\varkappa 123] + (-1)^{2|3}\,\vartheta^4[\varkappa 1]\right) \\
&\qquad - 2\,(-1)^{\varkappa.31'}\,c_3^2c_1^2\,\vartheta^2[\varkappa 3]\,\vartheta^2[\varkappa 1]\left(\vartheta^4[\varkappa 123] + (-1)^{3|1}\,\vartheta^4[\varkappa 2]\right) \\
&\qquad - 2\,(-1)^{\varkappa 23.12'}\,c_1^2c_2^2\,\vartheta^2[\varkappa 123]\,\vartheta^2[\varkappa 3]\left(\vartheta^4[\varkappa 1] + (-1)^{1|2}\,\vartheta^4[\varkappa 2]\right) \\
&\qquad - 2\,(-1)^{\varkappa 31.23'}\,c_2^2c_3^2\,\vartheta^2[\varkappa 123]\,\vartheta^2[\varkappa 1]\left(\vartheta^4[\varkappa 2] + (-1)^{2|3}\,\vartheta^4[\varkappa 3]\right) \\
&\qquad - 2\,(-1)^{\varkappa 12.31'}\,c_3^2c_1^2\,\vartheta^2[\varkappa 123]\,\vartheta^2[\varkappa 2]\left(\vartheta^4[\varkappa 3] + (-1)^{3|1}\,\vartheta^4[\varkappa 1]\right) \\
&- 2\left[(-1)^{12.14'}c_1^2c_2^2\left(\frac{[234]^2}{[134]^2} + (-1)^{1|2}\frac{[134]^2}{[234]^2}\right) + (-1)^{23.24'}c_2^2c_3^2\left(\frac{[134]^2}{[124]^2} + (-1)^{2|3}\frac{[124]^2}{[134]^2}\right)\right. \\
&\left. + (-1)^{31.34'}c_3^2c_1^2\left(\frac{[124]^2}{[234]^2} + (-1)^{3|1}\frac{[234]^2}{[124]^2}\right)\right]\ \vartheta^2[\varkappa 123]\,\vartheta^2[\varkappa 1]\,\vartheta^2[\varkappa 2]\,\vartheta^2[\varkappa 3] = 0.
\end{aligned}$$

15.

Setzt man in der zuletzt erhaltenen Gleichuug $[x] = [0]$, so nimmt dieselbe, wenn man sie zugleich nach Potenzen von $\vartheta[123]$ ordnet, die Gestalt:

$$A\,\vartheta^4[123] + 2B\,\vartheta^2[123] + C = 0$$

an, wobei:

$$A = c_1^4\,\vartheta^4[1] + c_2^4\,\vartheta^4[2] + c_3^4\,\vartheta^4[3] - 2c_1^2c_2^2\,\vartheta^2[1]\,\vartheta^2[2] - 2c_2^2c_3^2\,\vartheta^2[2]\,\vartheta^2[3] - 2c_3^2c_1^2\,\vartheta^2[3]\,\vartheta^2[1],$$

$$\begin{aligned} B = {} & (-1)^{13.23'}c_1^2c_3^2\vartheta^4[1]\,\vartheta^2[2] + (-1)^{12.23'}c_1^2c_2^2\vartheta^4[1]\,\vartheta^2[3] + (-1)^{12.13'}c_1^2c_2^2\vartheta^4[2]\,\vartheta^2[3] \\ & + (-1)^{23.13'}c_2^2c_3^2\vartheta^2[1]\,\vartheta^4[2] + (-1)^{23.12'}c_2^2c_3^2\vartheta^2[1]\,\vartheta^4[3] + (-1)^{13.12'}c_1^2c_3^2\vartheta^2[2]\,\vartheta^4[3] \\ & - \Big[(-1)^{12.14'}c_1^2c_2^2\Big(\frac{[234]^2}{[134]^2} + (-1)^{1|2}\frac{[134]^2}{[234]^2}\Big) + (-1)^{23.24'}c_2^2c_3^2\Big(\frac{[134]^2}{[124]^2} + (-1)^{2|3}\frac{[124]^2}{[134]^2}\Big) \\ & + (-1)^{31.31'}c_3^2c_1^2\Big(\frac{[124]^2}{[234]^2} + (-1)^{3|1}\frac{[234]^2}{[124]^2}\Big)\Big]\vartheta^2[1]\,\vartheta^2[2]\,\vartheta^2[3], \end{aligned}$$

$$C = \Big((-1)^{1|2}c_3^2\vartheta^2[1]\,\vartheta^2[2] + (-1)^{2|3}c_1^2\,\vartheta^2[2]\,\vartheta^2[3] + (-1)^{3|1}c_2^2\,\vartheta^2[3]\,\vartheta^2[1]\Big)^2$$

ist. Löst man die entstandene Gleichung nach $\vartheta^2[123]$ auf, so erhält man $\vartheta^2[123]$ durch $\vartheta^2[1]$, $\vartheta^2[2]$, $\vartheta^2[3]$ ausgedrückt in der Form:

$$(w) \qquad \vartheta^2[123] = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A},$$

wobei das Vorzeichen der auf der rechten Seite stehenden Wurzel noch zu bestimmen ist. Unter Zuziehung der drei ersten Gleichungen des aus (III) für $[x] = [0]$ hervorgehenden speciellen Systems von zwölf Gleichungen, welches in der Folge der einfacheren Ausdrucksweise wegen als Gleichungensystem (III_0) bezeichnet werden soll, lässt sich nun direkt darthun, dass die drei Ausdrücke A, B, C in der merkwürdigen Beziehung zu einander stehen, dass:

$$\begin{aligned} B^2 - AC = {} & 4[123]^6[124]^2[125]^2[126]^2[134]^2[135]^2[136]^2[234]^2[235]^2[236]^2 \\ & \times \vartheta^2[1]\,\vartheta^2[2]\,\vartheta^2[3]\,\vartheta^2[4]\,\vartheta^2[5]\,\vartheta^2[6] \end{aligned}$$

ist. Setzt man mit Rücksicht hierauf:

$$\sqrt{B^2 - AC} = 2[123]^3[124][125]\ldots[236]\,\vartheta[1]\,\vartheta[2]\ldots\vartheta[6],$$

so lässt sich die Gleichung (w) in die Form:

$$(w') \qquad A\,\vartheta^2[123] + B = \eta\,.\,2[123]^3[124]\ldots[236]\,\vartheta[1]\ldots\vartheta[6]$$

bringen, wo η entweder den Werth $+1$ oder den Werth -1 hat. Zunächst kann man nun beweisen, dass der Werth von η unabhängig von der Reihenfolge ist, in welcher die ungeraden Charakteristiken mit $[\omega_1], \ldots, [\omega_6]$ bezeichnet worden sind. Berücksichtigt man, dass die Gleichung (w') weder geändert wird, wenn man zwei der

drei Charakteristiken $[\omega_1]$, $[\omega_2]$, $[\omega_3]$, noch auch, wenn man zwei der drei Charakteristiken $[\omega_4]$, $[\omega_5]$, $[\omega_6]$ mit einander vertauscht, berücksichtigt ferner, dass $[\omega_1], \ldots, [\omega_6]$ die sechs ungeraden Charakteristiken in beliebiger Reihenfolge darstellen, so erkennt man, dass es zum Nachweise der Unveränderlichkeit von η genügt, zu zeigen, dass der Werth von η in der Gleichung (w') sich nicht ändert, wenn eine der Charakteristiken $[\omega_1]$, $[\omega_2]$, $[\omega_3]$, z. B. $[\omega_3]$, mit einer der Charakteristiken $[\omega_4]$, $[\omega_5]$, $[\omega_6]$, z. B. mit $[\omega_4]$, vertauscht wird. Führt man aber diese Vertauschung in der Gleichung (w') aus, so kann man mit Hülfe der Gleichungen des Systems (III_0) zeigen, dass linke und rechte Seite der dadurch entstehenden Gleichung sich beziehlich von der linken und rechten Seite der ursprünglichen nur dann um denselben Factor unterscheiden, wenn η in beiden Gleichungen denselben Werth hat. Nachdem so die Unveränderlichkeit des Werthes von η nachgewiesen, kann man denselben ermitteln, indem man für $[\omega_1], \ldots, [\omega_6]$ die sechs ungeraden Charakteristiken in irgend einer bestimmten, z. B. der natürlichen, Reihenfolge setzt und dann linke und rechte Seite der Gleichung (w') in Bezug auf die niedrigsten Potenzen von $e^{a_{11}}\, e^{a_{22}}$ vergleicht. Man findet so, dass η den Werth -1 besitzt, und es besteht daher, wenn $\sqrt{B^2 - AC}$ das oben angegebene ϑ-Product bezeichnet, die Gleichung:

$$\vartheta^2[123] = \frac{-B - \sqrt{B^2 - AC}}{A}.$$

Ebenso wie $\vartheta^2[123]$ kann man nun auch die Quadrate der neun übrigen geraden ϑ-Functionen durch $\vartheta^2[1]$, $\vartheta^2[2]$, $\vartheta^2[3]$ ausdrücken, indem man das unter (w) für $\vartheta^2[123]$ Gefundene in die neun letzten Gleichungen des Systems (III_0) einsetzt. Anstatt diese Ausdrücke hier aufzustellen, sollen — was im Wesentlichen dasselbe — unter Anwendung des von Herrn *Rosenhain* für einen speciellen Fall eingeschlagenen Verfahrens, die fünfzehn, denselben Nenner $\vartheta[3]$ besitzenden ϑ-Quotienten mit Hülfe der letzten für $\vartheta^2[123]$ gefundenen Gleichung als Functionen derselben zwei unabhängigen Veränderlichen x_1, x_2 dargestellt werden.

Setzt man, indem man unter a, b noch unbestimmte Constanten versteht:

$$\frac{\vartheta^2[1]}{\vartheta^2[3]} = a x_1 x_2, \qquad \frac{\vartheta^2[2]}{\vartheta^2[3]} = b(1 - x_1)(1 - x_2),$$

so stellen sich in Gemässheit der drei ersten Gleichungen des Systems (III_0) die den drei übrigen ungeraden Charakteristiken entsprechenden Quotienten in der Form: $k + l(x_1 + x_2) + m x_1 x_2$ dar, wo k, l, m jedesmal lineare Ausdrücke von a, b sind. Führt man dann die Bedingung ein, dass jede dieser drei Formen in ein Product zweier Linearfactoren zerfalle, in der Weise, dass $k + l(x_1 + x_2) + m x_1 x_2 = k(1 - n x_1)(1 - n x_2)$ wird, so erhält man drei Bedingungsgleichungen für die Grössen a, b, von denen aber jede eine Folge der beiden übrigen ist. Aus ihnen bestimmen sich die Grössen a, b eindeutig, und es ergeben sich dann weiter für jeden der drei Quotienten die ihm entsprechenden Werthe von k und n ohne Mühe. Man erhält so schliesslich, wenn man noch aus den linken wie rechten Seiten der entstehenden Gleichungen die Wurzel auszieht, für die fünf, den ungeraden Charakteristiken entsprechenden ϑ-Quotienten die folgenden Ausdrücke:

$$\frac{\vartheta[1]}{\vartheta[3]} = \frac{[124][125][126]}{[234][235][236]} \sqrt{x_1 x_2}\,,$$

$$\frac{\vartheta[2]}{\vartheta[3]} = \frac{[124][125][126]}{[134][135][136]} \sqrt{(1-x_1)(1-x_2)}\,,$$

$$\frac{\vartheta[4]}{\vartheta[3]} = \frac{[124][235][236]}{[123][135][136]} \sqrt{(1-p^2 x_1)(1-p^2 x_2)}\,,$$

$$\frac{\vartheta[5]}{\vartheta[3]} = \frac{[125][236][234]}{[123][136][134]} \sqrt{(1-q^2 x_1)(1-q^2 x_2)}\,,$$

$$\frac{\vartheta[6]}{\vartheta[3]} = \frac{[126][234][235]}{[123][134][135]} \sqrt{(1-r^2 x_1)(1-r^2 x_2)}\,,$$

wobei:

$$p^2 = (-1)^{13\cdot 24'} \frac{[125]^2[126]^2}{[235]^2[236]^2},\; q^2 = (-1)^{13\cdot 25'} \frac{[126]^2[124]^2}{[236]^2[234]^2},\; r^2 = (-1)^{13\cdot 26'} \frac{[124]^2[125]^2}{[234]^2[235]^2}$$

ist, und die rechts stehenden Wurzeln als Repräsentanten einwerthiger Functionen von v_1, v_2 selbst eindeutig bestimmt sind.

Mit Hülfe der oben für $\vartheta^2[123]$ gefundenen Gleichung lässt sich nun auch der Quotient der Functionen $\vartheta^2[123]$ und $\vartheta^2[3]$ durch x_1, x_2 ausdrücken. Durch Einführung der soeben für die den ungeraden Charakteristiken entsprechenden ϑ-Quotienten erhaltenen Ausdrücke ergibt sich nämlich:

$$A = [124]^4\,[125]^4\,[126]^4\,\vartheta^4[3]\,.\,(x_1 - x_2)^2\,,$$

$$B = (-1)^{13\cdot 12'} \frac{[234]^2[235]^2[236]^2}{[134]^2[135]^2[136]^2}[124]^4[125]^4[126]^4\,\vartheta^6[3]\Big[x_1(1-x_1)(1-p^2x_2)(1-q^2x_2)(1-r^2x_2)$$
$$+x_2(1-x_2)(1-p^2x_1)(1-q^2x_1)(1-r^2x_1)\Big]\,,$$

$$\sqrt{B^2 - AC} = \frac{[234]^2[235]^2[236]^2}{[134]^2[135]^2[136]^2}\,[124]^4\,[125]^4\,[126]^4\,\vartheta^6[3]\,.\,2P(x_1|x_2)\,,$$

wobei:

$$P(x_1|x_2) = \sqrt{x_1x_2}\sqrt{(1-x_1)(1-x_2)}\sqrt{(1-p^2x_1)(1-p^2x_2)}\sqrt{(1-q^2x_1)(1-q^2x_2)}\sqrt{(1-r^2x_1)(1-r^2x_2)}$$

ist, und man hat daher:

$$\frac{\vartheta^2[123]}{\vartheta^2[3]} = \frac{[234]^2[235]^2[236]^2}{[134]^2[135]^2[136]^2}$$

$$.\,\frac{(-1)^{12\cdot 13'}[x_1(1-x_1)(1-p^2x_2)(1-q^2x_2)(1-r^2x_2)+x_2(1-x_2)(1-p^2x_1)(1-q^2x_1)(1-r^2x_1)] - 2P(x_1|x_2)}{(x_1-x_2)^2}\,.$$

Dividirt man endlich linke wie rechte Seiten der neun letzten Gleichungen des Systems (III_0) durch $[123]^2\,\vartheta^2[3]$, und ersetzt die dann rechts auftretenden ϑ^2-Quotienten durch die im Vorigen für sie gefundenen, die Grössen x_1, x_2 enthaltenden Ausdrücke, so erhält man die den neun übrigen, von $[\omega_1\omega_2\omega_3]$ verschiedenen, geraden Charakteristiken entsprechenden ϑ^2-Quotienten folgendermassen als Functionen von x_1, x_2 dargestellt:

$$\frac{\vartheta^2[124]}{\vartheta^2[3]} = \frac{[124]^2[234]^2[235]^2[236]^2}{[123]^2[134]^2[135]^2[136]^2}$$

$$.\,\frac{(-1)^{12\cdot 13'}[x_1(1-x_1)(1-p^2x_1)(1-q^2x_2)(1-r^2x_2)+x_2(1-x_2)(1-p^2x_2)(1-q^2x_1)(1-r^2x_1)] - 2P(x_1|x_2)}{(x_1-x_2)^2}\,,$$

$$\frac{\vartheta^2[125]}{\vartheta^2[3]} = \frac{[125]^2[234]^2[235]^2[236]^2}{[123]^2[134]^2[135]^2[136]^2}$$

$$\cdot \frac{(-1)^{12.13'}[x_1(1-x_1)(1-p^2x_2)(1-q^2x_1)(1-r^2x_2)+x_2(1-x_2)(1-p^2x_1)(1-q^2x_2)(1-r^2x_1)]-2P(x_1|x_2)}{(x_1-x_2)^2},$$

$$\frac{\vartheta^2[126]}{\vartheta^2[3]} = \frac{[126]^2[234]^2[235]^2[236]^2}{[123]^2[134]^2[135]^2[136]^2}$$

$$\cdot \frac{(-1)^{12.13'}[x_1(1-x_1)(1-p^2x_2)(1-q^2x_2)(1-r^2x_1)+x_2(1-x_2)(1-p^2x_1)(1-q^2x_1)(1-r^2x_2)]-2P(x_1|x_2)}{(x_1-x_2)^2},$$

$$\frac{\vartheta^2[134]}{\vartheta^2[3]} = \frac{[234]^2[235]^2[236]^2}{[123]^2[135]^2[136]^2}$$

$$\cdot \frac{(-1)^{12.13'}[x_1(1-x_2)(1-p^2x_1)(1-q^2x_2)(1-r^2x_2)+x_2(1-x_1)(1-p^2x_2)(1-q^2x_1)(1-r^2x_1)]-2P(x_1|x_2)}{(x_1-x_2)^2},$$

$$\frac{\vartheta^2[135]}{\vartheta^2[3]} = \frac{[234]^2[235]^2[236]^2}{[123]^2[136]^2[134]^2}$$

$$\cdot \frac{(-1)^{12.13'}[x_1(1-x_2)(1-p^2x_2)(1-q^2x_1)(1-r^2x_2)+x_2(1-x_1)(1-p^2x_1)(1-q^2x_2)(1-r^2x_1)]-2P(x_1|x_2)}{(x_1-x_2)^2},$$

$$\frac{\vartheta^2[136]}{\vartheta^2[3]} = \frac{[234]^2[235]^2[236]^2}{[123]^2[134]^2[135]^2}$$

$$\cdot \frac{(-1)^{12.13'}[x_1(1-x_2)(1-p^2x_2)(1-q^2x_2)(1-r^2x_1)+x_2(1-x_1)(1-p^2x_1)(1-q^2x_1)(1-r^2x_2)]-2P(x_1|x_2)}{(x_1-x_2)^2},$$

$$\frac{\vartheta^2[234]}{\vartheta^2[3]} = \frac{[234]^4[235]^2[236]^2}{[123]^2[134]^2[135]^2[136]^2}$$

$$\cdot \frac{(-1)^{12.13'}[x_1(1-x_2)(1-p^2x_2)(1-q^2x_1)(1-r^2x_1)+x_2(1-x_1)(1-p^2x_1)(1-q^2x_2)(1-r^2x_2)]-2P(x_1|x_2)}{(x_1-x_2)^2},$$

$$\frac{\vartheta^2[235]}{\vartheta^2[3]} = \frac{[234]^2[235]^4[236]^2}{[123]^2[134]^2[135]^2[136]^2}$$

$$\cdot \frac{(-1)^{12.13'}[x_1(1-x_2)(1-p^2x_1)(1-q^2x_2)(1-r^2x_1)+x_2(1-x_1)(1-p^2x_2)(1-q^2x_1)(1-r^2x_2)]-2P(x_1|x_2)}{(x_1-x_2)^2},$$

$$\frac{\vartheta^2[236]}{\vartheta^2[3]} = \frac{[234]^2[235]^2[236]^4}{[123]^2[134]^2[135]^2[136]^2}$$

$$\cdot \frac{(-1)^{12.13'}[x_1(1-x_2)(1-p^2x_1)(1-q^2x_1)(1-r^2x_2)+x_2(1-x_1)(1-p^2x_2)(1-q^2x_2)(1-r^2x_1)]-2P(x_1|x_2)}{(x_1-x_2)^2}.$$

Die rechten Seiten der zehn letzten Gleichungen können durch Einführung von Hülfsgrössen als Quadrate charakteristischer Formen dargestellt werden. Zu dem Ende setze man:

$$\sqrt{x_1x_2} = \sqrt{x_1}\,\sqrt{x_2}\,, \qquad \sqrt{(1-x_1)(1-x_2)} = \sqrt{1-x_1}\,\sqrt{1-x_2}\,,$$

$$\sqrt{(1-p^2x_1)(1-p^2x_2)} = \sqrt{1-p^2x_1}\,\sqrt{1-p^2x_2}\,,\ \ \sqrt{(1-q^2x_1)(1-q^2x_2)} = \sqrt{1-q^2x_1}\,\sqrt{1-q^2x_2}\,,$$

$$\sqrt{(1-r^2x_1)(1-r^2x_2)} = \sqrt{1-r^2x_1}\,\sqrt{1-r^2x_2}\,,$$

indem man unter $\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}, \ldots, \sqrt{1-r^2x_1}$, $\sqrt{1-r^2x_2}$ Hülfsgrössen versteht, die zu-

nächst nur in soweit bestimmt sein sollen, als die letzten Gleichungen, deren linke Seiten nach dem Früheren eindeutig bestimmte Grössen sind, es verlangen. Führt man diese Hülfsgrössen in die Ausdrücke ein, die sich soeben für die zehn den geraden Charakteristiken entsprechenden ϑ^2-Quotienten ergeben haben, so gehen diese Ausdrücke in Quadrate rationaler Functionen dieser Hülfsgrössen über, und es lassen sich entsprechend die ϑ-Quotienten selbst als rationale, bis auf die Vorzeichen bestimmte Functionen derselben Grössen darstellen. Man erhält auf diese Weise, wenn man auch in die fünf früher schon gewonnenen Formeln die erwähnten Hülfsgrössen einführt, für die fünfzehn ϑ-Quotienten die folgenden Ausdrücke:

$$\frac{\vartheta[1]}{\vartheta[3]} = \frac{[124][125][126]}{[234][235][236]} \sqrt{x_1}\sqrt{x_2},$$

$$\frac{\vartheta[2]}{\vartheta[3]} = \frac{[124][125][126]}{[134][135][136]} \sqrt{1-x_1}\sqrt{1-x_2},$$

$$\frac{\vartheta[4]}{\vartheta[3]} = \frac{[124][235][236]}{[123][135][136]} \sqrt{1-p^2x_1}\sqrt{1-p^2x_2},$$

$$\frac{\vartheta[5]}{\vartheta[3]} = \frac{[125][236][234]}{[123][136][134]} \sqrt{1-q^2x_1}\sqrt{1-q^2x_2},$$

$$\frac{\vartheta[6]}{\vartheta[3]} = \frac{[126][234][235]}{[123][134][135]} \sqrt{1-r^2x_1}\sqrt{1-r^2x_2},$$

$$\frac{\vartheta[123]}{\vartheta[3]} = \varepsilon_1 \sqrt{(-1)^{12.13'}} \frac{[234][235][236]}{[134][135][136]}$$

$$\cdot \frac{\sqrt{x_1}\sqrt{1-x_1}\sqrt{1-p^2x_2}\sqrt{1-q^2x_2}\sqrt{1-r^2x_2} - (-1)^{12.13'}\sqrt{x_2}\sqrt{1-x_2}\sqrt{1-p^2x_1}\sqrt{1-q^2x_1}\sqrt{1-r^2x_1}}{x_1-x_2},$$

$$\frac{\vartheta[124]}{\vartheta[3]} = \varepsilon_2 \sqrt{(-1)^{12.13'}} \frac{[124][234][235][236]}{[123][134][135][136]}$$

$$\cdot \frac{\sqrt{x_1}\sqrt{1-x_1}\sqrt{1-p^2x_1}\sqrt{1-q^2x_2}\sqrt{1-r^2x_2} - (-1)^{12.13'}\sqrt{x_2}\sqrt{1-x_2}\sqrt{1-p^2x_2}\sqrt{1-q^2x_1}\sqrt{1-r^2x_1}}{x_1-x_2},$$

$$\frac{\vartheta[125]}{\vartheta[3]} = \varepsilon_3 \sqrt{(-1)^{12.13'}} \frac{[125][234][235][236]}{[123][134][135][136]}$$

$$\cdot \frac{\sqrt{x_1}\sqrt{1-x_1}\sqrt{1-p^2x_2}\sqrt{1-q^2x_1}\sqrt{1-r^2x_2} - (-1)^{12.13'}\sqrt{x_2}\sqrt{1-x_2}\sqrt{1-p^2x_1}\sqrt{1-q^2x_2}\sqrt{1-r^2x_1}}{x_1-x_2},$$

$$\frac{\vartheta[126]}{\vartheta[3]} = \varepsilon_4 \sqrt{(-1)^{12.13'}} \frac{[126][234][235][236]}{[123][134][135][136]}$$

$$\cdot \frac{\sqrt{x_1}\sqrt{1-x_1}\sqrt{1-p^2x_2}\sqrt{1-q^2x_1}\sqrt{1-r^2x_1} - (-1)^{12.13'}\sqrt{x_2}\sqrt{1-x_2}\sqrt{1-p^2x_1}\sqrt{1-q^2x_1}\sqrt{1-r^2x_2}}{x_1-x_2},$$

$$\frac{\vartheta[134]}{\vartheta[3]} = \varepsilon_5 \sqrt{(-1)^{12.13'}} \frac{[134][234][235][236]}{[123][131][135][136]}$$

$$\cdot \frac{\sqrt{x_1}\sqrt{1-x_2}\sqrt{1-p^2x_1}\sqrt{1-q^2x_2}\sqrt{1-r^2x_2} - (-1)^{12.13'}\sqrt{x_2}\sqrt{1-x_1}\sqrt{1-p^2x_2}\sqrt{1-q^2x_1}\sqrt{1-r^2x_1}}{x_1-x_2},$$

$$\frac{\vartheta[135]}{\vartheta[3]} = \varepsilon_6 \sqrt{(-1)^{12.13'}\frac{[135]}{[123]}\frac{[234][235][236]}{[134][135][136]}}$$

$$\cdot \frac{\sqrt{x_1}\sqrt{1-x_2}\sqrt{1-p^2x_2}\sqrt{1-q^2x_1}\sqrt{1-r^2x_2}-(-1)^{12.13'}\sqrt{x_2}\sqrt{1-x_1}\sqrt{1-p^2x_1}\sqrt{1-q^2x_2}\sqrt{1-r^2x_1}}{x_1-x_2},$$

$$\frac{\vartheta[136]}{\vartheta[3]} = \varepsilon_7 \sqrt{(-1)^{12.13'}\frac{[136]}{[123]}\frac{[234][235][236]}{[134][135][136]}}$$

$$\cdot \frac{\sqrt{x_1}\sqrt{1-x_2}\sqrt{1-p^2x_2}\sqrt{1-q^2x_2}\sqrt{1-r^2x_1}-(-1)^{12.13'}\sqrt{x_2}\sqrt{1-x_1}\sqrt{1-p^2x_1}\sqrt{1-q^2x_1}\sqrt{1-r^2x_2}}{x_1-x_2},$$

$$\frac{\vartheta[234]}{\vartheta[3]} = \varepsilon_8 \sqrt{(-1)^{12.13'}\frac{[234]}{[123]}\frac{[234][235][236]}{[134][135][136]}}$$

$$\cdot \frac{\sqrt{x_1}\sqrt{1-x_2}\sqrt{1-p^2x_2}\sqrt{1-q^2x_1}\sqrt{1-r^2x_1}-(-1)^{12.13'}\sqrt{x_2}\sqrt{1-x_1}\sqrt{1-p^2x_1}\sqrt{1-q^2x_2}\sqrt{1-r^2x_2}}{x_1-x_2},$$

$$\frac{\vartheta[235]}{\vartheta[3]} = \varepsilon_9 \sqrt{(-1)^{12.13'}\frac{[235]}{[123]}\frac{[234][235][236]}{[134][135][136]}}$$

$$\cdot \frac{\sqrt{x_1}\sqrt{1-x_2}\sqrt{1-p^2x_1}\sqrt{1-q^2x_2}\sqrt{1-r^2x_1}-(-1)^{12.13'}\sqrt{x_2}\sqrt{1-x_1}\sqrt{1-p^2x_2}\sqrt{1-q^2x_1}\sqrt{1-r^2x_2}}{x_1-x_2},$$

$$\frac{\vartheta[236]}{\vartheta[3]} = \varepsilon_{10} \sqrt{(-1)^{12.13'}\frac{[236]}{[123]}\frac{[234][235][236]}{[134][135][136]}}$$

$$\cdot \frac{\sqrt{x_1}\sqrt{1-x_2}\sqrt{1-p^2x_1}\sqrt{1-q^2x_1}\sqrt{1-r^2x_2}-(-1)^{12.13'}\sqrt{x_2}\sqrt{1-x_1}\sqrt{1-p^2x_2}\sqrt{1-q^2x_2}\sqrt{1-r^2x_1}}{x_1-x_2}.$$

In diesem Systeme bezeichnen $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{10}$ noch zu bestimmende Grössen, deren Quadrate sämmtlich den Werth $+1$ haben, während unter $\sqrt{(-1)^{12.13'}}$ eine beliebige der beiden Wurzeln ξ der Gleichung $\xi^2 = (-1)^{12.13'}$ zu verstehen ist.

Um die Grössen $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{10}$ zu bestimmen, dividire man die fünfzehn aus (C_4) für $[\mu] = [0]$ folgenden Gleichungen durch $\vartheta^2[3]$ und führe an Stelle der entstehenden ϑ-Quotienten die für sie soeben aufgestellten Ausdrücke ein. Es ergeben sich dann zwischen den Grössen ε die folgenden Beziehungen:

$$\varepsilon_2 = (-1)^{31.1'}\varepsilon_1, \qquad \varepsilon_3 = (-1)^{35.1'}\varepsilon_1, \qquad \varepsilon_4 = (-1)^{36.1'}\varepsilon_1,$$
$$\varepsilon_5 = (-1)^{24.1'}\varepsilon_1, \qquad \varepsilon_6 = (-1)^{25.1'}\varepsilon_1, \qquad \varepsilon_7 = (-1)^{26.1'}\varepsilon_1,$$
$$\varepsilon_8 = (-1)^{14.1'}\varepsilon_1, \qquad \varepsilon_9 = (-1)^{15.1'}\varepsilon_1, \qquad \varepsilon_{10} = (-1)^{16.1'}\varepsilon_1.$$

Gleichzeitig würde sich dabei auch der Werth der in der Gleichung (w') vorkommenden Grösse η ergeben, wenn derselbe nicht schon früher ermittelt und eingesetzt, η vielmehr als unbestimmte Grösse weiter geführt worden und als solche in die Ausdrücke für die zehn letzten ϑ-Quotienten übergegangen wäre. Die eine Grösse ε_1 bleibt, wie man sieht, unbestimmt, d. h. die fünfzehn aus (C_4) für $[\mu] = [0]$ folgenden Gleichungen werden identisch erfüllt, sowohl, wenn $\varepsilon_1 = +1$, als auch, wenn $\varepsilon_1 = -1$ gesetzt wird. Berücksichtigt man, dass die Hülfsgrössen $\sqrt{x_1}, \ldots, \sqrt{1-r^2x_2}$ nicht eindeutig bestimmt sind, und dass bei passender Aenderung der Bestimmung derselben zu den Ausdrücken für die den geraden Charakteristiken entsprechenden ϑ-Quotienten, und zwar immer gleichzeitig zu allen zehn, der Factor -1 hinzugebracht werden kann, so erklärt sich diese Unbestimmtheit

von ε_1, zugleich erkennt man aber auch, dass stets $\varepsilon_1 = +1$ gesetzt werden darf, dass man aber dann nicht nur die fünf ersten der obigen fünfzehn Gleichungen, sondern auch noch die sechste bei der Bestimmung der Hülfsgrössen berücksichtigen muss.

Bei der vorstehenden Untersuchung haben die sechs ungeraden ϑ-Functionen als Ausgangspunkt gedient; an Stelle derselben hätte man auch, wie aus dem Gange der Untersuchung unmittelbar ersichtlich ist, von irgend sechs anderen ϑ-Functionen, deren Charakteristiken ein *Rosenhain*'sches Sechsersystem bilden, allgemein von $\vartheta[\varkappa\omega_1]((v)), \ldots, \vartheta[\varkappa\omega_6]((v))$ ausgehen und entsprechend die fünfzehn den Nenner $\vartheta[\varkappa\omega_3]((v))$ besitzenden ϑ-Quotienten durch zwei unabhängige Veränderliche $x_1^{(\varkappa)}$, $x_2^{(\varkappa)}$ ausdrücken können. Die diesem allgemeinen Falle entsprechenden Formeln lassen sich aber ohne Mühe aus den fünfzehn obigen, dem speciellen Falle $[\varkappa] = [0]$ entsprechenden, ableiten, indem man in diesen letzteren, die für beliebige Werthe der Variablen v gelten, (v) in $\left(v + \left|\begin{smallmatrix}\varkappa\\ \varkappa'\end{smallmatrix}\right|\right)$ übergehen lässt, die neuen Grössen, in welche x_1, x_2 durch diese Aenderung von v_1, v_2 übergeführt werden, mit $x_1^{(\varkappa)}$, $x_2^{(\varkappa)}$ bezeichnet und hierauf auf die linken Seiten die aus der Gleichung (6) des Art. 1. folgende Relation:

$$\frac{\vartheta[\varepsilon]\left(\left(v + \left|\begin{matrix}\varkappa\\ \varkappa'\end{matrix}\right|\right)\right)}{\vartheta[\eta]\left(\left(v + \left|\begin{matrix}\varkappa\\ \varkappa'\end{matrix}\right|\right)\right)} = \frac{\vartheta[\varepsilon + \varkappa]((v))}{\vartheta[\eta + \varkappa]((v))}\, e^{-[\varkappa_1(\varepsilon_1' - \eta_1') + \varkappa_2(\varepsilon_2' - \eta_2')]\frac{\pi i}{2}}$$

anwendet.

An dieser Stelle sei auch noch erwähnt, dass die neun denselben Nenner $\vartheta^2[\omega_1\omega_2\omega_3]((0))$ besitzenden Quotienten der von Null verschiedenen Grössen $\vartheta^2[\varepsilon]((0))$, da zwischen ihnen nach dem Früheren sechs von einander unabhängige Relationen bestehen, sämmtlich durch drei Hülfsgrössen, z. B. durch die im Früheren eingeführten Grössen:

$$p^2 = (-1)^{13.24'} \frac{[125]^2[126]^2}{[235]^2[236]^2}, \qquad q^2 = (-1)^{13.25'} \frac{[126]^2[124]^2}{[236]^2[234]^2},$$

$$r^2 = (-1)^{13.26'} \frac{[124]^2[125]^2}{[234]^2[235]^2}$$

ausgedrückt werden können. Setzt man:

$$p_1^2 = 1 - p^2, \qquad q_1^2 = 1 - q^2, \qquad r_1^2 = 1 - r^2,$$

$$p_r^2 = r^2 - p^2, \qquad q_p^2 = p^2 - q^2, \qquad r_q^2 = q^2 - r^2,$$

so folgt aus den drei ersten Gleichungen des Systems (II) in Art. 14.:

$$p_1^2 = (-1)^{12.34'} \frac{[135]^2[136]^2}{[235]^2[236]^2}, \qquad q_1^2 = (-1)^{12.35'} \frac{[136]^2[134]^2}{[236]^2[234]^2},$$

$$r_1^2 = (-1)^{12.36'} \frac{[134]^2[135]^2}{[234]^2[235]^2},$$

und aus den drei letzten Gleichungen dieses Systems:

$$p_r^2 = (-1)^{13.12' + 14.16'} \frac{[123]^2[125]^2[135]^2}{[234]^2[235]^2[236]^2}, \qquad q_p^2 = (-1)^{13.12' + 15.14'} \frac{[123]^2[126]^2[136]^2}{[234]^2[235]^2[236]^2},$$

$$r_q^2 = (-1)^{13.12' + 16.15'} \frac{[123]^2[124]^2[134]^2}{[234]^2[235]^2[236]^2}.$$

Mit Rücksicht hierauf kann man, indem man allgemein unter $\sqrt{(-1)^{(\varepsilon)(\eta)'}}$ eine beliebige der beiden Wurzeln ξ der Gleichung $\xi^2 = (-1)^{(\varepsilon)(\eta)'}$ versteht:

$$p = \sqrt{(-1)^{12\cdot 24'}}\,\frac{[125][126]}{[235][236]},\quad q = \sqrt{(-1)^{13\cdot 25'}}\,\frac{[126][124]}{[236][234]},\quad r = \sqrt{(-1)^{13\cdot 26'}}\,\frac{[124][125]}{[234][235]},$$

$$p_1 = \sqrt{(-1)^{12\cdot 34'}}\,\frac{[135][136]}{[235][236]},\quad q_1 = \sqrt{(-1)^{12\cdot 35'}}\,\frac{[136][134]}{[236][234]},\quad r_1 = \sqrt{(-1)^{12\cdot 36'}}\,\frac{[134][135]}{[234][235]},$$

$$p_r = \sqrt{(-1)^{13\cdot 12'}}\,\sqrt{(-1)^{14\cdot 16'}}\,\frac{[123][125][135]}{[234][235][236]},\quad q_p = \sqrt{(-1)^{13\cdot 12'}}\,\sqrt{(-1)^{15\cdot 14'}}\,\frac{[123][126][136]}{[234][235][236]},$$

$$r_q = \sqrt{(-1)^{13\cdot 12'}}\,\sqrt{(-1)^{16\cdot 15'}}\,\frac{[123][124][134]}{[234][235][236]}$$

setzen und erhält dann die neun genannten Quotienten ausgedrückt wie folgt:

$$\frac{[124]^2}{[123]^2} = (-1)^{13\cdot 12'}\,\frac{\sqrt{(-1)^{12\cdot 24'}}\sqrt{(-1)^{13\cdot 25'}}\sqrt{(-1)^{13\cdot 26'}}}{\sqrt{(-1)^{14\cdot 16'}}\sqrt{(-1)^{15\cdot 14'}}}\,\frac{p_1 q r}{p_r q_p},$$

$$\frac{[125]^2}{[123]^2} = (-1)^{13\cdot 12'}\,\frac{\sqrt{(-1)^{13\cdot 24'}}\sqrt{(-1)^{12\cdot 35'}}\sqrt{(-1)^{13\cdot 26'}}}{\sqrt{(-1)^{15\cdot 14'}}\sqrt{(-1)^{16\cdot 15'}}}\,\frac{p q_1 r}{q_p r_q},$$

$$\frac{[126]^2}{[123]^2} = (-1)^{13\cdot 12'}\,\frac{\sqrt{(-1)^{13\cdot 24'}}\sqrt{(-1)^{13\cdot 25'}}\sqrt{(-1)^{12\cdot 36'}}}{\sqrt{(-1)^{16\cdot 15'}}\sqrt{(-1)^{14\cdot 16'}}}\,\frac{p q r_1}{r_q p_r},$$

$$\frac{[134]^2}{[123]^2} = (-1)^{13\cdot 12'}\,\frac{\sqrt{(-1)^{13\cdot 24'}}\sqrt{(-1)^{12\cdot 35'}}\sqrt{(-1)^{12\cdot 36'}}}{\sqrt{(-1)^{14\cdot 16'}}\sqrt{(-1)^{15\cdot 14'}}}\,\frac{p q_1 r_1}{p_r q_p},$$

$$\frac{[135]^2}{[123]^2} = (-1)^{13\cdot 12'}\,\frac{\sqrt{(-1)^{12\cdot 34'}}\sqrt{(-1)^{13\cdot 25'}}\sqrt{(-1)^{12\cdot 36'}}}{\sqrt{(-1)^{15\cdot 14'}}\sqrt{(-1)^{16\cdot 15'}}}\,\frac{p_1 q r_1}{q_p r_q},$$

$$\frac{[136]^2}{[123]^2} = (-1)^{13\cdot 12'}\,\frac{\sqrt{(-1)^{12\cdot 34'}}\sqrt{(-1)^{12\cdot 35'}}\sqrt{(-1)^{12\cdot 36'}}}{\sqrt{(-1)^{16\cdot 15'}}\sqrt{(-1)^{14\cdot 16'}}}\,\frac{p_1 q_1 r}{r_q p_r},$$

$$\frac{[234]^2}{[123]^2} = (-1)^{13\cdot 12'}\,\frac{\sqrt{(-1)^{13\cdot 24'}}\sqrt{(-1)^{12\cdot 34'}}}{\sqrt{(-1)^{14\cdot 16'}}\sqrt{(-1)^{15\cdot 14'}}}\,\frac{p p_1}{p_r q_p},$$

$$\frac{[235]^2}{[123]^2} = (-1)^{13\cdot 12'}\,\frac{\sqrt{(-1)^{13\cdot 25'}}\sqrt{(-1)^{12\cdot 35'}}}{\sqrt{(-1)^{15\cdot 14'}}\sqrt{(-1)^{16\cdot 15'}}}\,\frac{q q_1}{q_p r_q},$$

$$\frac{[236]^2}{[123]^2} = (-1)^{13\cdot 12'}\,\frac{\sqrt{(-1)^{13\cdot 26'}}\sqrt{(-1)^{12\cdot 36'}}}{\sqrt{(-1)^{16\cdot 15'}}\sqrt{(-1)^{14\cdot 16'}}}\,\frac{r r_1}{r_q p_r}.$$

Führt man die gewonnenen Ausdrücke in die Gleichungen (I), (II) ein, so wird eine jede derselben identisch erfüllt.

Die fünfzehn oben abgeleiteten Gleichungen, welche die ϑ-Quotienten als Functionen der nämlichen zwei unabhängigen Variablen x_1, x_2 darstellen, zusammen mit den soeben für die Quotienten der zehn von Null verschiedenen Grössen $\vartheta^2[\varepsilon](0)$ erhaltenen Ausdrücken können als vollständiger Ersatz der sämmtlichen in (A_4), (B_4), (B_4'), (C_4), (A_5), (B_5) enthaltenen Gleichungen angesehen werden, insofern als eine jede derselben durch Einführung der Grössen x_1, x_2, p, q, r identisch erfüllt wird.

16.

Die Untersuchungen des Art. 14. haben gezeigt:

1) dass durch die Quadrate von je vier ϑ-Functionen, deren Charakteristiken ein Vierersystem zweiter Art bilden, die der zwölf übrigen linear ausgedrückt werden können, (System (III))

2) dass zwischen je vier solchen ϑ-Quadraten eine homogene Gleichung vierten Grades besteht, die aber in Bezug auf jede der vier ϑ-Functionen auch nur vom vierten Grade ist. (Gleichung (IV))

Aehnliche Eigenschaften kommen jedem Systeme von vier ϑ-Functionen zu, deren Charakteristiken ein Vierersystem erster Art bilden. Man kann nämlich, wie im Folgenden geschehen soll, zeigen:

1) dass durch die Quadrate von je vier ϑ-Functionen, deren Charakteristiken ein Vierersystem erster Art bilden, die der zwölf übrigen linear ausgedrückt werden können, (System (III'))

2) dass zwischen je vier solchen ϑ-Functionen eine homogene Gleichung vierten Grades, eine sogenannte *Göpel*'sche biquadratische Relation, besteht, die aber auch in Bezug auf jede der vier ϑ-Functionen vom vierten Grade ist. (Gleichung (IV'))

Bezeichnet man in der Formel (B_4), in welcher $[\varkappa] = [\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4]$, $[\lambda]$ eine beliebige Charakteristik ist, und ξ eine der Zahlen 1, 2, 3, 4 vertritt, die Charakteristik $[\varkappa]$ mit $[\omega_0]$, setzt ferner $[\lambda\omega_\xi] = [\mu]$, so erhält man die Formel:

$$2\vartheta^2[\omega_0\omega_\xi]((0))\,\vartheta^2[\mu]((v)) = \sum_{i=1}^{i=4}(-1)^{(\mu\omega_0\omega_i)(\omega_i\omega_\xi)'}\,\vartheta^2[\omega_0\omega_i]((0))\,\vartheta^2[\mu\omega_\xi\omega_i]((v)),$$

in welcher also $[\omega_0] = [\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4]$ ist, während $[\mu]$ ihrer Entstehung nach eine beliebige Charakteristik bezeichnet. Setzt man in dieser Formel nach einander $\xi = 3$ und $\xi = 4$, so gehen unter Einführung der im Vorigen schon wiederholt angewandten abgekürzten Bezeichnung die Gleichungen:

$$[03]^2\vartheta^2[\mu] = (-1)^{\mu 01.13'}[01]^2\vartheta^2[\mu 13] + (-1)^{\mu 02.23'}[02]^2\vartheta^2[\mu 23] + (-1)^{\mu 04.43'}[04]^2\vartheta^2[\mu 34],$$

$$[04]^2\vartheta^2[\mu] = (-1)^{\mu 01.14'}[01]^2\vartheta^2[\mu 14] + (-1)^{\mu 02.24'}[02]^2\vartheta^2[\mu 24] + (-1)^{\mu 03.34'}[03]^2\vartheta^2[\mu 34]$$

beziehlich hervor, aus denen man endlich durch Elimination von $\vartheta^2[\mu 34]$ die Gleichung:

(III')
$$\begin{aligned}&\left([04]^4 - (-1)^{3\,4}[03]^4\right)\vartheta^2[\mu]\\ = \;&(-1)^{\mu 01.14'}[01]^2[04]^2\vartheta^2[\mu 14] + (-1)^{\mu 02.24'}[02]^2[04]^2\vartheta^2[\mu 24]\\ &-(-1)^{3\,4}.(-1)^{\mu 01.13'}[01]^2[03]^2\vartheta^2[\mu 13] - (-1)^{3\,4}.(-1)^{\mu 02.23'}[02]^2[03]^2\vartheta^2[\mu 23]\end{aligned}$$

erhält. Die Charakteristiken der vier auf der rechten Seite vorkommenden ϑ-Functionen bilden ein Vierersystem erster Art, und man kann, mit Rücksicht auf das in Art. 8. Gezeigte, bei festgehaltener Charakteristik $[\mu]$ durch passende Wahl der Charakteristiken $[\omega_1], \ldots, [\omega_4]$

jedes beliebige Vierersystem erster Art, in welchem die Charakteristik $[\mu]$ nicht vorkommt, erzeugen. Mit Hülfe dieser Formel ist man also im Stande, durch die Quadrate von vier ϑ-Functionen, deren Charakteristiken ein Vierersystem erster Art bilden, das Quadrat einer jeden der zwölf übrigen linear auszudrücken.

Um die erwähnte *Göpel*'sche biquadratische Relation zwischen den vier Functionen $\vartheta[\varkappa 13]$, $\vartheta[\varkappa 14]$, $\vartheta[\varkappa 23]$, $\vartheta[\varkappa 24]$, deren Charakteristiken, wenn $[\varkappa]$ willkürlich gelassen wird, nach Früherem ein beliebiges Vierersystem erster Art repräsentiren, zu erhalten, gehe man von der am Schlusse des Art. 12. gegebenen Formel (C_4') aus, die, wie schon in Art. 13. erwähnt wurde, die merkwürdige Erscheinung darbietet, dass die vier bei irgend zwei der drei in ihr vorkommenden ϑ-Producte auftretenden Charakteristiken ein Vierersystem erster Art bilden. Quadrirt man dieselbe in passender Weise, so erhält man die Gleichung:

$$\begin{aligned}[512]^2[534]^2\vartheta^2[\varkappa 12]\,\vartheta^2[\varkappa 34] = [513]^2[524]^2\vartheta^2[\varkappa 13]\,\vartheta^2[\varkappa 24] + [514]^2[523]^2\vartheta^2[\varkappa 14]\,\vartheta^2[\varkappa 23]\\ - 2(-1)^{34.12'}[513][524][514][523]\,\vartheta[\varkappa 13]\,\vartheta[\varkappa 24]\,\vartheta[\varkappa 14]\,\vartheta[\varkappa 23],\end{aligned}$$

in der jetzt noch das Product $\vartheta^2[\varkappa 12]\,\vartheta^2[\varkappa 34]$ durch die vier Functionen $\vartheta^2[\varkappa 13]$, $\vartheta^2[\varkappa 14]$, $\vartheta^2[\varkappa 23]$, $\vartheta^2[\varkappa 24]$ zu ersetzen ist. Zu dem Ende lasse man in der Gleichung (III') an Stelle der beliebigen Charakteristik $[\mu]$ zunächst die Charakteristik $[\varkappa 12]$, hierauf die Charakteristik $[\varkappa 34]$ treten; man erhält dadurch die beiden folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}&\left([04]^4 - (-1)^{3|4}[03]^4\right)\vartheta^2[\varkappa 12]\\ = \;& (-1)^{1|4}.(-1)^{\varkappa 3.14'}[01]^2[04]^2\vartheta^2[\varkappa 24] + (-1)^{2|4}.(-1)^{\varkappa 3.24'}[02]^2[04]^2\vartheta^2[\varkappa 14]\\ &-(-1)^{3|4}.(-1)^{1|3}.(-1)^{\varkappa 4.13'}[01]^2[03]^2\vartheta^2[\varkappa 23] - (-1)^{3|4}.(-1)^{2|3}.(-1)^{\varkappa 4.23'}[02]^2[03]^2\vartheta^2[\varkappa 13],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\left([04]^4 - (-1)^{3|4}[03]^4\right)\vartheta^2[\varkappa 34]\\ = \;& (-1)^{\varkappa 2.14'}[01]^2[04]^2\vartheta^2[\varkappa 13] + (-1)^{\varkappa 1.24'}[02]^2[04]^2\vartheta^2[\varkappa 23]\\ &-(-1)^{3|4}.(-1)^{\varkappa 2.13'}[01]^2[03]^2\vartheta^2[\varkappa 14] - (-1)^{3|4}.(-1)^{\varkappa 1.23'}[02]^2[03]^2\vartheta^2[\varkappa 24],\end{aligned}$$

aus denen dann, indem man linke wie rechte Seiten mit einander multiplicirt und die auftretenden Exponentialgrössen passend vereinigt, die Gleichung:

$$\begin{aligned}&\left([04]^4 - (-1)^{3|4}[03]^4\right)^2\vartheta^2[\varkappa 12]\,\vartheta^2[\varkappa 34]\\ =\;&(-1)^{\varkappa.0'}.(-1)^{4.3'+2.1'}[01]^2[02]^2[03]^2[04]^2\\ &\quad\times\left(\vartheta^4[\varkappa 13] + (-1)^{3|4}\vartheta^4[\varkappa 14] + (-1)^{2|3}\vartheta^4[\varkappa 23] + (-1)^{3|4}.(-1)^{1|2}\vartheta^4[\varkappa 24]\right)\\ &+(-1)^{\varkappa.12'}.(-1)^{4.3'+2.1'}[01]^2[02]^2\left([03]^4 + (-1)^{3|4}[04]^4\right)\\ &\quad\times\left((-1)^{34.2'}\vartheta^2[\varkappa 13]\,\vartheta^2[\varkappa 14] + (-1)^{1,2}.(-1)^{34.1'}\vartheta^2[\varkappa 23]\,\vartheta^2[\varkappa 24]\right)\\ &+(-1)^{\varkappa.34'}.(-1)^{4.3'+2.1'}[03]^2[04]^2\left([01]^4 + (-1)^{1|2}[02]^4\right)\\ &\quad\times\left((-1)^{12.4'}\vartheta^2[\varkappa 13]\,\vartheta^2[\varkappa 23] + (-1)^{3|4}.(-1)^{12.3'}\vartheta^2[\varkappa 14]\,\vartheta^2[\varkappa 24]\right)\\ &+\left((-1)^{0.14'}[01]^4[04]^4 + (-1)^{0.23'}[02]^4[03]^4\right)\vartheta^2[\varkappa 13]\,\vartheta^2[\varkappa 24]\\ &+\left((-1)^{0.24'}[02]^4[04]^4 + (-1)^{0.13'}[01]^4[03]^4\right)\vartheta^2[\varkappa 14]\,\vartheta^2[\varkappa 23]\end{aligned}$$

hervorgeht. Führt man den hieraus für das Product $\vartheta^2[\varkappa 12]\,\vartheta^2[\varkappa 34]$ sich ergebenden Ausdruck in die obige Gleichung ein, wendet die mit Hülfe der Formeln (I), (II) des Art. 14. herzustellenden Relationen:

$$-\Big((-1)^{0.14'}[01]^4[04]^4[512]^2[534]^2+(-1)^{0.23'}[02]^4[03]^4[512]^2[534]^2\Big)+[513]^2[524]^2\Big([04]^4-(-1)^{3|4}[03]^4\Big)^2$$
$$=(-1)^{36.14'+23.15'}.(-1)^{1|3}[01]^2[02]^2[03]^2[04]^2\Big([512]^4+(-1)^{1|3}.(-1)^{2|4}[534]^4\Big),$$

$$-\Big((-1)^{0.24'}[02]^4[04]^4[512]^2[534]^2+(-1)^{0.13'}[01]^4[03]^4[512]^2[534]^2\Big)+[523]^2[514]^2\Big([04]^4-(-1)^{3|4}[03]^4\Big)^2$$
$$=(-1)^{36.24'+13.25'}.(-1)^{2|3}[01]^2[02]^2[03]^2[04]^2\Big([512]^4+(-1)^{1|3}.(-1)^{2|4}[534]^4\Big)$$

an und vereinfacht dann noch die auftretenden Exponentialgrössen, so erhält man die gesuchte biquadratische Relation zwischen den vier Functionen $\vartheta[\varkappa 13]$, $\vartheta[\varkappa 14]$, $\vartheta[\varkappa 23]$, $\vartheta[\varkappa 24]$ in der Form:

$$(\mathrm{IV}')\qquad \vartheta^4[\varkappa 13]+(-1)^{3|4}\vartheta^4[\varkappa 14]+(-1)^{1|2}\vartheta^4[\varkappa 23]+(-1)^{3|4}.(-1)^{1|2}\vartheta^4[\varkappa 24]$$
$$+(-1)^{\varkappa.34'}\frac{[03]^4+(-1)^{3|4}[04]^4}{[03]^2[04]^2}\Big((-1)^{34.2'}\vartheta^2[\varkappa 13]\,\vartheta^2[\varkappa 14]+(-1)^{1|2}.(-1)^{34.1'}\vartheta^2[\varkappa 23]\,\vartheta^2[\varkappa 24]\Big)$$
$$+(-1)^{\varkappa.12'}\frac{[01]^4+(-1)^{1|2}[02]^4}{[01]^2[02]^2}\Big((-1)^{12.4'}\vartheta^2[\varkappa 13]\,\vartheta^2[\varkappa 23]+(-1)^{3|4}.(-1)^{12.3'}\vartheta^2[\varkappa 14]\,\vartheta^2[\varkappa 24]\Big)$$
$$+(-1)^{\varkappa.0'+5.6'}.(-1)^{1|4}\frac{[534]^4+(-1)^{1|3}.(-1)^{2|4}[512]^4}{[534]^2[512]^2}\Big((-1)^{23.14'}\vartheta^2[\varkappa 13]\,\vartheta^2[\varkappa 24]$$
$$+(-1)^{13.24'}\vartheta^2[\varkappa 14]\,\vartheta^2[\varkappa 23]\Big)$$
$$+2(-1)^{\varkappa.0'+4.3'+2.1'+34.12'}\frac{[513][514][523][524]\big([03]^4-(-1)^{3|4}[04]^4\big)^2}{[01]^2[02]^2[03]^2[04]^2[512]^2[534]^2}\vartheta[\varkappa 13]\,\vartheta[\varkappa 14]\,\vartheta[\varkappa 23]\,\vartheta[\varkappa 24]=0.$$

Die von *Göpel**) gegebene specielle Gleichung geht aus dieser allgemeinen Formel unter anderem hervor, wenn man $[\varkappa]=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$, $[\omega_1]=\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}$, $[\omega_2]=\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}$, $[\omega_3]=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}$, $[\omega_4]=\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}$ setzt.

Der gewonnenen Endgleichung (IV′) soll jetzt, ähnlich wie *Borchardt***) in einem speciellen Falle es gethan, eine andere Gestalt gegeben werden. Zunächst erhält man aus den Gleichungen (I), (II) des Art. 14. die folgenden Relationen:

$$[03]^4+(-1)^{3|4}[04]^4$$
$$=(-1)^{5|2}.(-1)^{3|4}\Big([513]^4+(-1)^{3|4}[514]^4-(-1)^{1|2}[523]^4-(-1)^{3|4}.(-1)^{1|2}[524]^4\Big),$$
$$[01]^4+(-1)^{1|2}[02]^4$$
$$=(-1)^{5|4}.(-1)^{1|2}\Big([513]^4-(-1)^{3|4}[514]^4+(-1)^{1|2}[523]^4-(-1)^{3|4}.(-1)^{1|2}[524]^4\Big),$$

*) *Göpel*, Theoriae transcendentium Abelianarum etc. Crelle's Journal Bd. 35. pag. 292.

**) *Borchardt*, Ueber die Darstellung der *Kummer*'schen Fläche etc. Crelle's Journal Bd. 83. pag. 238.

$$[534]^4 + (-1)^{1|2} \cdot (-1)^{3|4}[512]^4$$
$$= (-1)^{1|4}\Big([513]^4 - (-1)^{3|4}[514]^4 - (-1)^{1|2}[523]^4 + (-1)^{3|4} \cdot (-1)^{1|2}[524]^4\Big),$$

$$[03]^2[04]^2 = -(-1)^{6.25'+1.6'}\Big((-1)^{1.34'}[513]^2[514]^2 - (-1)^{1|2} \cdot (-1)^{2.34'}[523]^2[524]^2\Big),$$

$$[01]^2[02]^2 = -(-1)^{6.45'+3.6'}\Big((-1)^{3.12'}[513]^2[523]^2 - (-1)^{3|4} \cdot (-1)^{4.12'}[514]^2[524]^2\Big),$$

und weiter noch die Gleichung:

$$\Big([03]^4 - (-1)^{3|4}[01]^4\Big)^2$$
$$= \prod^{+1,-1}\Big((-1)^{1.3'}[513]^2 + \varepsilon_1 \sqrt{(-1)^{3|4}} \cdot (-1)^{1.4'}[514]^2 + \varepsilon_2 \sqrt{(-1)^{1|2}} \cdot (-1)^{2.3'}[523]^2$$
$$+ \varepsilon_1 \varepsilon_2 \sqrt{(-1)^{3|4}} \sqrt{(-1)^{1|2}} \cdot (-1)^{2.4'}[524]^2\Big),$$

wobei allgemein $\sqrt{(-1)^{\varrho|\sigma}}$ eine beliebige der beiden Wurzeln ξ der Gleichung $\xi^2 = (-1)^{\varrho|\sigma}$ bezeichnet, und das Symbol $\prod\limits^{+1,-1}$ bedeutet, dass das Product jener vier Terme gebildet werden soll, welche aus dem allgemeinen, hinter dem Symbole stehenden Gliede hervorgehen, wenn man an Stelle von ε_1, ε_2 nach einander die vier Variationen der Elemente $+1, -1$ zur zweiten Classe mit Wiederholung treten lässt. Unter Anwendung dieser Relationen geht, wenn man noch die Charakteristik $[\varkappa]$ in neuer Bezeichnung durch $[\varkappa\omega_5]$ ersetzt, aus der Gleichung (IV′) die folgende hervor:

$$\vartheta^4[\varkappa 513] + (-1)^{3|4}\vartheta^4[\varkappa 514] + (-1)^{1|2}\vartheta^4[\varkappa 523] + (-1)^{3|4} \cdot (-1)^{1|2}\vartheta^4[\varkappa 524]$$

$$-(-1)^{\varkappa.34'}\frac{[513]^4 + (-1)^{3|4}[514]^4 - (-1)^{1|2}[523]^4 - (-1)^{3|4} \cdot (-1)^{1|2}[524]^4}{(-1)^{1.34'}[513]^2[514]^2 - (-1)^{1|2} \cdot (-1)^{2.34'}[523]^2[524]^2}$$
$$\times\Big((-1)^{1.34'}\vartheta^2[\varkappa 513]\,\vartheta^2[\varkappa 514] + (-1)^{1|2} \cdot (-1)^{2.34'}\vartheta^2[\varkappa 523]\,\vartheta^2[\varkappa 524]\Big)$$

$$-(-1)^{\varkappa.12'}\frac{[513]^4 - (-1)^{3|4}[514]^4 + (-1)^{1|2}[523]^4 - (-1)^{3|4} \cdot (-1)^{1|2}[524]^4}{(-1)^{12.3'}[513]^2[523]^2 - (-1)^{3|4} \cdot (-1)^{12.4'}[514]^2[524]^2}$$
$$\times\Big((-1)^{12.3'}\vartheta^2[\varkappa 513]\,\vartheta^2[\varkappa 523] + (-1)^{3|4} \cdot (-1)^{12.4'}\vartheta^2[\varkappa 514]\,\vartheta^2[\varkappa 524]\Big)$$

$$-(-1)^{\varkappa.1234'}\frac{[513]^4 - (-1)^{3|4}[514]^4 - (-1)^{1|2}[523]^4 + (-1)^{3|4} \cdot (-1)^{1|2}[524]^4}{(-1)^{1.3'+2.4'}[513]^2[524]^2 - (-1)^{1.4'+2.3'}[514]^2[523]^2}$$
$$\times\Big((-1)^{1.3'+2.4'}\vartheta^2[\varkappa 513]\,\vartheta^2[\varkappa 524] + (-1)^{1.4'+2.3'}\vartheta^2[\varkappa 514]\,\vartheta^2[\varkappa 523]\Big)$$

$$+ 2(-1)^{\varkappa.1234'}\frac{(-1)^{12.34'} \cdot (-1)^{1|2} \cdot (-1)^{3|4}[513][514][523][524]}{\big((-1)^{1.34'}[513]^2[514]^2 - (-1)^{1|2} \cdot (-1)^{2.34'}[523]^2[524]^2\big)} \times$$
$$\frac{\prod\limits^{+1,-1}\big((-1)^{1.3'}[513]^2 + \varepsilon_1\sqrt{(-1)^{3|4}} \cdot (-1)^{1.4'}[514]^2 + \varepsilon_2\sqrt{(-1)^{1|2}} \cdot (-1)^{2.3'}[523]^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2\sqrt{(-1)^{3|4}}\sqrt{(-1)^{1|2}} \cdot (-1)^{2.4'}[524]^2\big)}{\big((-1)^{12.3'}[513]^2[523]^2 - (-1)^{3|4} \cdot (-1)^{12.4'}[514]^2[524]^2\big)\big((-1)^{1.3'+2.4'}[513]^2[524]^2 - (-1)^{1.4'+2.3'}[514]^2[523]^2\big)}$$
$$\times\,\vartheta[\varkappa 513]\,\vartheta[\varkappa 514]\,\vartheta[\varkappa 523]\,\vartheta[\varkappa 524] = 0\,.$$

Aus dieser letzten Gleichung aber erhält man endlich noch, indem man:

$$\sqrt{(-1)^{1\cdot 3'}}\,\vartheta[\varkappa 513]=\theta(\varkappa 513),\quad \sqrt[4]{(-1)^{3|4}}\sqrt{(-1)^{1\cdot 4'}}\,\vartheta[\varkappa 514]=\theta(\varkappa 514),$$

$$\sqrt[4]{(-1)^{1|2}}\sqrt{(-1)^{2\cdot 3'}}\,\vartheta[\varkappa 523]=\theta(\varkappa 523),\quad \sqrt[4]{(-1)^{3|4}}\sqrt[4]{(-1)^{1|2}}\sqrt{(-1)^{2\cdot 4'}}\,\vartheta[\varkappa 524]=\theta(\varkappa 524),$$

$$\sqrt{(-1)^{1\cdot 3'}}\,[513]=(513),\quad \sqrt[4]{(-1)^{3|4}}\sqrt{(-1)^{1\cdot 4'}}\,[514]=(514),$$

$$\sqrt[4]{(-1)^{1|2}}\sqrt{(-1)^{2\cdot 3'}}\,[523]=(523),\quad \sqrt[4]{(-1)^{3|4}}\sqrt[4]{(-1)^{1|2}}\sqrt{(-1)^{2\cdot 4'}}\,[524]=(524)$$

setzt, wobei allgemein unter $\sqrt[4]{(-1)^{\varepsilon|\eta}}$ eine beliebige der beiden Wurzeln ξ der Gleichung $\xi^2=\sqrt{(-1)^{\varepsilon|\eta}}$, und unter $\sqrt{(-1)^{(\varepsilon)(\eta)'}}$ eine beliebige der beiden Wurzeln ξ der Gleichung $\xi^2=(-1)^{(\varepsilon)(\eta)'}$ zu verstehen ist, die Gleichung*):

$$\begin{aligned}
&\theta^4(\varkappa 513)+\theta^4(\varkappa 514)+\theta^4(\varkappa 523)+\theta^4(\varkappa 524)\\
&-(-1)^{\varkappa\cdot 34'}\,\frac{(513)^4+(514)^4-(523)^4-(524)^4}{(513)^2(514)^2-(523)^2(524)^2}\Big(\theta^2(\varkappa 513)\,\theta^2(\varkappa 514)+\theta^2(\varkappa 523)\,\theta^2(\varkappa 524)\Big)\\
&-(-1)^{\varkappa\cdot 12'}\,\frac{(513)^4-(514)^4+(523)^4-(524)^4}{(513)^2(523)^2-(514)^2(524)^2}\Big(\theta^2(\varkappa 513)\,\theta^2(\varkappa 523)+\theta^2(\varkappa 514)\,\theta^2(\varkappa 524)\Big)\\
&-(-1)^{\varkappa\cdot 1234'}\,\frac{(513)^4-(514)^4-(523)^4+(524)^4}{(513)^2(524)^2-(514)^2(523)^2}\Big(\theta^2(\varkappa 513)\,\theta^2(\varkappa 524)+\theta^2(\varkappa 514)\,\theta^2(\varkappa 523)\Big)\\
&+2(-1)^{\varkappa\cdot 1234'}\,\frac{(513)(514)(523)(524)\prod\limits^{+1,-1}\big((513)^2+\varepsilon_1(514)^2+\varepsilon_2(523)^2+\varepsilon_1\varepsilon_2(524)^2\big)}{\big((513)^2(514)^2-(523)^2(524)^2\big)\big((513)^2(523)^2-(514)^2(524)^2\big)\big((513)^2(524)^2-(514)^2(523)^2\big)}\\
&\qquad\times\theta(\varkappa 513)\,\theta(\varkappa 514)\,\theta(\varkappa 523)\,\theta(\varkappa 524)=0.
\end{aligned}$$

Vergleicht man zum Schlusse die in diesem Artikel gewonnenen Resultate mit denen des Art. 14., so erkennt man, dass mit Hülfe der Formel (III′) durch die Quadrate von vier ϑ-Functionen:

$$(\mathrm{V}_1)\qquad \vartheta[\varkappa\omega_1\omega_3](\!(v)\!),\quad \vartheta[\varkappa\omega_1\omega_4](\!(v)\!),\quad \vartheta[\varkappa\omega_2\omega_3](\!(v)\!),\quad \vartheta[\varkappa\omega_2\omega_4](\!(v)\!),$$

deren Charakteristiken ein Viererssystem erster Art bilden, die Quadrate der zwölf übrigen sich in analoger Weise linear ausdrücken, wie im Systeme (III) durch die Quadrate von vier ϑ-Functionen:

$$(\mathrm{V}_2)\qquad \vartheta[\varkappa\omega_1](\!(v)\!),\quad \vartheta[\varkappa\omega_2](\!(v)\!),\quad \vartheta[\varkappa\omega_3](\!(v)\!),\quad \vartheta[\varkappa\omega_1\omega_2\omega_3](\!(v)\!),$$

deren Charakteristiken ein Viererssystem zweiter Art bilden, die Quadrate der zwölf übrigen sich linear ausdrücken. Solche zwölf Gleichungen (III′) ersetzen dann ebenso wie die Gleichungen (III), wenn man noch die Relationen (I), (II) hinzunimmt, die sämmtlichen Gleichungen (A_4), (B_4), und es ersetzt weiter in Verbindung mit ihnen die Gleichung (IV′), in ähnlichem Sinne wie früher die Gleichung (IV) zusammen mit den Gleichungen (III), die sämmtlichen Gleichungen (B_4), (C_4), insofern als man aus ihr unter Zuhülfenahme der Gleichungen (I), (II), (III′) durch eine Reihe passender

*) Vergl. hierzu: *Frobenius*, Ueber das Additionstheorem der ϑ-Functionen etc. Crelle's Journal Bd. 89. pag. 205.

Umformungen zu jeder der Relationen (B_4), (C_4) gelangen kann, wenn man nur dabei die directe Vergleichung der ϑ-Reihen zur Bestimmung von Grössen, die den Werth $+1$ oder -1 haben, benützt. Quadrirt man die Gleichung (IV′) so, dass die entstehende Gleichung nur gerade Potenzen der ϑ-Functionen enthält, so kann diese letztere mit Hülfe der Relationen (I), (II), (III) in die Gleichung (IV) übergeführt werden.

17.

Die fünf vorausgehenden Artikel haben sich mit der Untersuchung jener ϑ-Relationen beschäftigt, welche aus der Formel (R) des Art. 9. folgen. Die Formel (R) selbst entstand durch Combination der Formeln (P_1), (P_2). Die diesen letzteren entsprechenden ϑ-Relationen sollen jetzt abgeleitet und zur Herstellung der Additionstheoreme der ϑ-Quotienten verwendet werden.

Versteht man unter $[\omega_0]$ eine beliebige gerade Charakteristik und denkt sich dieselbe in drei ungerade zerlegt, so kann man, welche der beiden möglichen Zerlegungen auch vorliegt, die Bezeichnung der ungeraden Charakteristiken durch $[\omega_1], \ldots, [\omega_6]$ immer so einrichten, dass die betreffende Zerlegung durch $[\omega_0] = [\omega_1\omega_2\omega_3]$ repräsentirt wird, und es nimmt dann die entsprechende Formel (P_1) oder (P_2), wenn man noch berücksichtigt, dass in derselben $(\omega_0)'$ die Grösse $x'_{[\omega_0]}$, $(\varkappa\omega_i)$ die Grösse $x_{[\varkappa\omega_i]}$ vertritt, die Gestalt:

$$(P) \qquad x'_{[\omega_0]} = \sum_{i=0}^{i=3} (-1)^{\varkappa\omega_i\,\omega_0}\, x_{[\varkappa\omega_i]}$$

an. Diese Formel bleibt nach dem in Art. 12. Bemerkten richtig, wenn man

$$x'_{[\omega_0]} = (-1)^{(\omega_0)(\rho\sigma)'}\,\vartheta[\omega_0]((0))\,\vartheta[\omega_0\rho]((u+v))\,\vartheta[\omega_0\sigma]((u+w))\,\vartheta[\omega_0\rho\sigma]((-v-w)),$$

$$x_{[\varkappa\omega_i]} = (-1)^{(\varkappa\omega_i)(\rho\sigma)'}\,\vartheta[\varkappa\omega_i]((u))\,\vartheta[\varkappa\omega_i\rho]((v))\,\vartheta[\varkappa\omega_i\sigma]((w))\,\vartheta[\varkappa\omega_i\rho\sigma]((-u-v-w))$$

setzt, unter (u), (v), (w) unabhängige Veränderliche verstanden. Lässt man in diesen Ausdrücken (v) zu $(-u)$ werden, so muss, wenn $x'_{[\omega_0]}$ nicht der Null gleich werden soll, in welchem Falle die Gleichung (P) entweder eine Identität oder eine der Gleichungen (B_2), (C_2) des Art. 12. liefern würde, die Charakteristik $[\omega_0\rho]$ gerade sein. Setzt man daher weiter, indem man unter $[\omega]$ eine beliebige gerade Charakteristik, die auch der Charakteristik $[\omega_0]$ gleich sein kann, versteht, $[\rho] = [\omega_0\omega]$, so gehen die obigen Ausdrücke für $x'_{[\omega_0]}$, $x_{[\varkappa\omega_i]}$, wenn man noch an Stelle des Buchstabens w den Buchstaben v treten lässt, beziehlich über in:

$$x'_{[\omega_0]} = (-1)^{(\omega_0)(\omega_0\omega\sigma)' + (\sigma)(\omega_0)'}\,\vartheta[\omega_0]((0))\,\vartheta[\omega]((0))\,\vartheta[\omega_0\sigma]((u+v))\,\vartheta[\omega\sigma]((u-v)),$$

$$x_{[\varkappa\omega_i]} = (-1)^{(\varkappa\omega_i)(\omega_0\omega\sigma)'}\,\vartheta[\varkappa\omega_i]((u))\,\vartheta[\varkappa\omega_0\omega\omega_i]((-u))\,\vartheta[\varkappa\omega_i\sigma]((v))\,\vartheta[\varkappa\omega_0\omega\omega_i\sigma]((-v)),$$

und aus der Gleichung (P) entsteht, wenn man jetzt diese Ausdrücke an Stelle von $x'_{[\omega_0]}$, $x_{[\varkappa\omega_i]}$ einführt, eine ϑ-Formel, der die Gestalt:

$$(P')\qquad \vartheta[\omega_0]((0))\,\vartheta[\omega]((0))\,\vartheta[\omega_0\sigma]((u+v))\,\vartheta[\omega\sigma]((u-v))$$
$$=\sum_{i=0}^{i=3}(-1)^{|\varkappa\omega_i|\omega_0|}\cdot(-1)^{(\varkappa\omega_0\omega_i)(\omega_0\omega\sigma)'+(\sigma)(\omega_0)'}\,\vartheta[\varkappa\omega_i]((u))\,\vartheta[\varkappa\omega_0\omega\omega_i]((-u))\,\vartheta[\varkappa\omega_i\sigma]((v))\,\vartheta[\varkappa\omega_0\omega\omega_i\sigma]((-v))$$

gegeben werden kann.

Setzt man jetzt in dieser Gleichung, in welcher $[\sigma]$ eine beliebige Charakteristik bezeichnet, $[\sigma]=[\omega\acute{\omega}_0\acute{\omega}]$, indem man unter $[\acute{\omega}_0]$, $[\acute{\omega}]$ zwei beliebige gerade Charakteristiken versteht, die auch einander gleich sein dürfen, und wendet die Formel (5) des Art. 1. an, so nimmt dieselbe, nach passender Vereinigung der Exponentialgrössen, die Gestalt:

$$(Z)\qquad \vartheta[\omega_0]((0))\,\vartheta[\omega]((0))\,\vartheta[\omega_0\omega\acute{\omega}_0\acute{\omega}]((u+v))\,\vartheta[\acute{\omega}_0\acute{\omega}]((u-v))$$
$$=\sum_{i=0}^{i=3}(-1)^{|\acute{\omega}_0\acute{\omega}|}\cdot(-1)^{(\omega_0\omega\acute{\omega}_0\acute{\omega})(\varkappa\omega_i)'}\,\vartheta[\varkappa\omega_i]((u))\,\vartheta[\varkappa\omega_0\omega\omega_i]((u))\,\vartheta[\varkappa\omega\acute{\omega}_0\acute{\omega}\omega_i]((v))\,\vartheta[\varkappa\omega_0\acute{\omega}_0\acute{\omega}\omega_i]((v))$$

an. In dieser Formel bezeichnen also $[\omega_0]$, $[\omega]$, $[\acute{\omega}_0]$, $[\acute{\omega}]$ vier willkührlich gewählte gerade Charakteristiken, die auch theilweise oder alle einander gleich sein können, $[\omega_1]$, $[\omega_2]$, $[\omega_3]$ drei ungerade Charakteristiken, die der Bedingung $[\omega_0]\equiv[\omega_1\omega_2\omega_3]$ genügen. Zerlegt man jetzt auch die gerade Charakteristik $[\acute{\omega}_0]$ auf eine der beiden möglichen Weisen in drei ungerade, und bezeichnet dieselben mit $[\acute{\omega}_1]$, $[\acute{\omega}_2]$, $[\acute{\omega}_3]$, sodass also $[\acute{\omega}_0]\equiv[\acute{\omega}_1\acute{\omega}_2\acute{\omega}_3]$ ist, so kann man in der letzten Gleichung $[\omega_0]=[\acute{\omega}_0]$ setzen, wenn man nur gleichzeitig an Stelle der Charakteristiken $[\omega_1]$, $[\omega_2]$, $[\omega_3]$ die drei Charakteristiken $[\acute{\omega}_1]$, $[\acute{\omega}_2]$, $[\acute{\omega}_3]$ treten lässt. Thut man dies und setzt weiter noch $[\omega]=[\acute{\omega}]$, führt auch an Stelle der beliebigen Charakteristik $[\varkappa]$ eine andere gleichfalls willkührliche Charakteristik $[\lambda]$ ein, so entsteht aus der Gleichung (Z) die Gleichung:

$$(N)\qquad \vartheta[\acute{\omega}_0]((0))\,\vartheta[\acute{\omega}]((0))\,\vartheta[0]((u+v))\,\vartheta[\acute{\omega}_0\acute{\omega}]((u-v))$$
$$=\sum_{i=0}^{i=3}(-1)^{(\lambda\acute{\omega}_i)(\acute{\omega}_0\acute{\omega})'}\,\vartheta[\lambda\acute{\omega}_i]((u))\,\vartheta[\lambda\acute{\omega}_0\acute{\omega}\acute{\omega}_i]((u))\,\vartheta[\lambda\acute{\omega}_0\acute{\omega}_i]((v))\,\vartheta[\lambda\acute{\omega}\acute{\omega}_i]((v)),$$

und man erhält schliesslich, indem man linke und rechte Seite von (Z) durch linke und rechte Seite von (N) beziehlich dividirt, das Additionstheorem der ϑ Quotienten in folgender allgemeinster Gestalt:

$$\frac{\vartheta[\omega_0\omega\acute{\omega}_0\acute{\omega}]((u+v))}{\vartheta[0]((u+v))}$$
$$=\frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{i=3}(-1)^{|\acute{\omega}_0\acute{\omega}|}\cdot(-1)^{(\omega_0\omega\acute{\omega}_0\acute{\omega})(\varkappa\omega_i)'}\,\frac{\vartheta[\varkappa\omega_i]((u))}{\vartheta[0]((u))}\,\frac{\vartheta[\varkappa\omega_0\omega\omega_i]((u))}{\vartheta[0]((u))}\,\frac{\vartheta[\varkappa\omega\acute{\omega}_0\acute{\omega}\omega_i]((v))}{\vartheta[0]((v))}\,\frac{\vartheta[\varkappa\omega_0\acute{\omega}_0\acute{\omega}\omega_i]((v))}{\vartheta[0]((v))}}{\displaystyle\frac{\vartheta[\omega_0]((0))\,\vartheta[\omega]((0))}{\vartheta[\acute{\omega}_0]((0))\,\vartheta[\acute{\omega}]((0))}\sum_{i=0}^{i=3}(-1)^{(\lambda\acute{\omega}_i)(\acute{\omega}_0\acute{\omega})'}\,\frac{\vartheta[\lambda\acute{\omega}_i]((u))}{\vartheta[0]((u))}\,\frac{\vartheta[\lambda\acute{\omega}_0\acute{\omega}\acute{\omega}_i]((u))}{\vartheta[0]((u))}\,\frac{\vartheta[\lambda\acute{\omega}_0\acute{\omega}_i]((v))}{\vartheta[0]((v))}\,\frac{\vartheta[\lambda\acute{\omega}\acute{\omega}_i]((v))}{\vartheta[0]((v))}}.$$

Da hierbei $[\omega_0]$, $[\omega]$, $[\acute{\omega}_0]$, $[\acute{\omega}]$ vier beliebige gerade Charakteristiken bezeichnen, die auch theilweise einander gleich sein können, so kann man dieselben stets auf mehrere

Weisen so bestimmen, dass die linke Seite abgesehen von einem Factor ± 1 in $\vartheta[\varepsilon]((u+v)) : \vartheta[0]((u+v))$ übergeht, unter $[\varepsilon]$ eine beliebige der fünfzehn von $[0]$ verschiedenen Charakteristiken verstanden.

Setzt man in der gewonnenen Formel $[\omega'] = [\omega'_0] = [0]$, $[\varkappa] = [\omega]$, $[\lambda] = [0]$, so erhält man die Gleichung:

$$\frac{\vartheta[\omega_0\omega]((u+v))}{\vartheta[0]((u+v))}$$

$$= \frac{\dfrac{\vartheta[\omega_0\omega]((u))}{\vartheta[0]((u))}\dfrac{\vartheta[\omega_0]((v))}{\vartheta[0]((v))}\dfrac{\vartheta[\omega]((v))}{\vartheta[0]((v))} + \sum_{i=1}^{i=3}(-1)^{(\omega_0\omega)(\omega_i)'}\dfrac{\vartheta[\omega\omega_i]((u))}{\vartheta[0]((u))}\dfrac{\vartheta[\omega_0\omega_i]((u))}{\vartheta[0]((u))}\dfrac{\vartheta[\omega_i]((v))}{\vartheta[0]((v))}\dfrac{\vartheta[\omega\omega_0\omega_i]((v))}{\vartheta[0]((v))}}{\dfrac{\vartheta[\omega_0]((0))}{\vartheta[0]((0))}\cdot\dfrac{\vartheta[\omega]((0))}{\vartheta[0]((0))}\left\{1 + \sum_{i=1}^{i=3}\dfrac{\vartheta^2[\omega'_i]((u))}{\vartheta^2[0]((u))}\dfrac{\vartheta^2[\omega'_i]((v))}{\vartheta^2[0]((v))}\right\}},$$

in welcher nunmehr die vorkommenden ungeraden Charakteristiken den Bedingungen $[\omega_1\omega_2\omega_3] \equiv [\omega_0]$, $[\omega'_1\omega'_2\omega'_3] = [0]$ unterworfen sind. Diese Gleichung stellt die einfachste Additionsformel für den zu einer beliebigen Charakteristik $[\varepsilon]$ gehörigen ϑ-Quotienten dar; sie besitzt die Eigenschaft für $(v) = (0)$ immer in eine identische Gleichung überzugehen. Setzt man auch noch $[\omega] = [0]$, so geht aus ihr die Gleichung:

$$\frac{\vartheta[\omega_0]((u+v))}{\vartheta[0]((u+v))}$$

$$= \frac{\dfrac{\vartheta[\omega_0]((u))}{\vartheta[0]((u))}\dfrac{\vartheta[\omega_0]((v))}{\vartheta[0]((v))} + \sum_{i=1}^{i=3}(-1)^{(\omega_0)(\omega_i)'}\dfrac{\vartheta[\omega_i]((u))}{\vartheta[0]((u))}\dfrac{\vartheta[\omega_0\omega_i]((u))}{\vartheta[0]((u))}\dfrac{\vartheta[\omega_i]((v))}{\vartheta[0]((v))}\dfrac{\vartheta[\omega_0\omega_i]((v))}{\vartheta[0]((v))}}{\dfrac{\vartheta[\omega_0]((0))}{\vartheta[0]((0))}\left\{1 + \sum_{i=1}^{i=3}\dfrac{\vartheta^2[\omega'_i]((u))}{\vartheta^2[0]((u))}\dfrac{\vartheta^2[\omega'_i]((v))}{\vartheta^2[0]((v))}\right\}}$$

hervor, welche die einfachste Additionsformel für die den geraden Charakteristiken entsprechenden ϑ-Quotienten repräsentirt. Dieselbe besitzt die Eigenschaft, dass jedes Glied in Bezug auf die Variablensysteme (u) und (v) symmetrisch ist; sie geht immer für $(u) = (0)$ und ebenso für $(v) = (0)$ in eine identische Gleichung über.

Tabelle I.

$1'+2'+3'+4'=1+2+3+4$	$5'+6'+7'+8'=1+2-3-4$	$9'+10'+11'+12'=1-2+3-4$	$13'+14'+15'+16'=1-2-3+4$
$1'+2'-3'-4'=5+6+7+8$	$5'+6'-7'-8'=5+6-7-8$	$9'+10'-11'-12'=5-6+7-8$	$13'+14'-15'-16'=5-6-7+8$
$1'-2'+3'-4'=9+10+11+12$	$5'-6'+7'-8'=9+10-11-12$	$9'-10'+11'-12'=9-10+11-12$	$13'-14'+15'-16'=9-10-11+12$
$1'-2'-3'+4'=13+14+15+16$	$5'-6'-7'+8'=13+14-15-16$	$9'-10'-11'+12'=13-14+15\ \ 16$	$13'-14'-15'+16'=13-14-15+16$
$1'+2'+5'+6'=1+2+5+6$	$3'+4'+7'+8'=1+2-5-6$	$9'+10'+13'+14'=1-2+5-6$	$11'+12'+15'+16'=1-2-5+6$
$1'+2'-5'-6'=3+4+7+8$	$3'+4'-7'-8'=3+4-7-8$	$9'+10'-13'-14'=3-4+7-8$	$11'+12'-15'-16'=3-4-7+8$
$1'-2'+5'-6'=9+10+13+14$	$3'-4'+7'-8'=9+10-13-14$	$9'-10'+13'-14'=9-10+13-14$	$11'-12'+15'-16'=9-10-13+14$
$1'-2'-5'+6'=11+12+15+16$	$3'-4'-7'+8'=11+12-15-16$	$9'-10'-13'+14'=11-12+15-16$	$11'-12'-15'+16'=11-12-15+16$
$1'+2'+8'+7'=1+2+8+7$	$3'+4'+6'+5'=1+2-8-7$	$12'+11'+13'+14'=1-2+8-7$	$10'+9'+15'+16'=1-2-8+7$
$1'+2'-8'-7'=3+4+6+5$	$3'+4'-6'-5'=3+4-6-5$	$12'+11'-13'-14'=3-4+6-5$	$10'+9'-15'-16'=3-4\ \ 6+5$
$1'-2'+8'-7'=12+11+13+14$	$3'-4'+6'-5'=12+11-13-14$	$12'-11'+13'-14'=12-11+13-14$	$10'-9'+15'-16'=12-11-13+14$
$1'-2'-8'+7'=10+9+15+16$	$3'-4'-6'+5'=10+9-15-16$	$12'-11'\ \ 13'+14'=10-9+15-16$	$10'-9'-15'+16'=10-9-15+16$
$1'+16'+13'+4'=1+16+13+4$	$11'+6'+7'+10'=1+16-13-4$	$9'+8'+5'+12'=1-16+13-4$	$3'+14'+15'+2'=1-16-13+4$
$1'+16'-13'-4'=11+6+7+10$	$11'+6'-7'-10'=11+6-7-10$	$9'+8'-5'-12'=11-6+7-10$	$3'+14'-15'-2'=11-6-7+10$
$1'-16'+13'-4'=9+8+5+12$	$11'-6'+7'-10'=9+8-5-12$	$9'-8'+5'-12'=9-8+5-12$	$3'-14'+15'-2'=9-8-5+12$
$1'-16'-13'+4'=3+14+15+2$	$11'-6'-7'+10'=3+14-15-2$	$9'-8'-5'+12'=3-14+15-2$	$3'-14'-15'+2'=3\ \ 14-15+2$
$1'+16'+11'+6'=1+16+11+6$	$13'+4'+7'+10'=1+16-11-6$	$9'+8'+3'+14'=1-16+11-6$	$5'+12'+15'+2'=1-16-11+6$
$1'+16'-11'-6'=13+4+7+10$	$13'+4'-7'-10'=13+4-7-10$	$9'+8'-3'-14'=13-4+7-10$	$5'+12'\ \ 15'-2'=13-4-7+10$
$1'-16'+11'-6'=9+8+3+14$	$13'-4'+7'-10'=9+8-3-14$	$9'-8'+3'-14'=9-8+3-14$	$5'-12'+15'-2'=9-8-3+14$
$1'-16'-11'+6'=5+12+15+2$	$13'-4'-7'+10'=5+12-15-2$	$9'-8'-3'+14'=5-12+15-2$	$5'-12'-15'+2'=5-12-15+2$
$1+16'+10'+7'=1+16+10+7$	$13+4'+6'+11'=1+16-10-7$	$12'+5'+3'+14'=1-16+10-7$	$8'+9'+15'+2'=1-16-10+7$
$1'+16'-10'-7'=13+4+6+11$	$13'+4'-6'-11'=13+4-6-11$	$12'+5'-3'-14'=13-1+6-11$	$8'+9'-15'-2'=13-4-6+11$
$1'-16'+10'-7'=12+5+3+14$	$13'-4'+6'-11'=12+5-3-14$	$12'-5'+3'-14'=12-5+3-14$	$8'-9'+15'-2'=12-5-3+14$
$1'-16'-10'+7'=8+9+15+2$	$13'-4'-6'+11'=8+9-15-2$	$12'-5'-3'+14'=8\ \ 9+15-2$	$8'-9'-15'+2'=8-9-15+2$

1'+14'+15'+4' = 1+14+15+4	11'+8'+5'+10' = 1+14-15-4	9'+6'+7'+12' = 1-14+15-4	3'+16'+13'+2' = 1-14-15+4
1'+14'-15'-4' = 11+8+5+10	11'+8'-5'-10' = 11+8-5-10	9'+6'-7'-12' = 11-8+5-10	3'+16'-13'-2' = 11-8-5+10
1'-14'+15'-4' = 9+6+7+12	11'-8'+5'-10' = 9+6-7-12	9'-6'+7'-12' = 9-6+7-12	3'-16'+13'-2' = 9-6-7+12
1'-14'-15'+4' = 3+16+13+2	11'-8'-5'+10' = 3+16-13-2	9'-6'-7'+12' = 3-16+13-2	3'-16'-13'+2' = 3-16-13+2
1'+14'+11'+8' = 1+14+11+8	15'+4'+5'+10' = 1+14-11-8	9'+6'+3'+16' = 1-14+11-8	7'+12'+13'+2' = 1-14-11+8
1'+14'-11'-8' = 15+4+5+10	15'+4'-5'-10' = 15+4-5-10	9'+6'-3'-16' = 15-4+5-10	7'+12'-13'-2' = 15-4-5+10
1'-14'+11'-8' = 9+6+3+16	15'-4'+5'-10' = 9+6-3-16	9'-6'+3'-16' = 9-6+3-16	7'-12'+13'-2' = 9-6-3+16
1'-14'-11'+8' = 7+12+13+2	15'-4'-5'+10' = 7+12-13-2	9'-6'-3'+16' = 7-12+13-2	7'-12'-13'+2' = 7-12-13+2
1'+14'+10'+5' = 1+14+10+5	15'+4'+8'+11' = 1+14-10-5	12'+7'+3'+16' = 1-14+10-5	6'+9'+13'+2' = 1-14-10+5
1'+14'-10'-5' = 15+4+8+11	15'+4'-8'-11' = 15+4-8-11	12'+7'-3'-16' = 15-4+8-11	6'+9'-13'-2' = 15-4-8+11
1'-14'+10'-5' = 12+7+3+16	15'-4'+8'-11' = 12+7-3-16	12'-7'+3'-16' = 12-7+3-16	6'-9'+13'-2' = 12-7-3+16
1'-14'-10'+5' = 6+9+13+2	15'-4'-8'+11' = 6+9-13-2	12'-7'-3'+16' = 6-9+13-2	6'-9'-13'+2' = 6-9-13+2
1'+12'+15'+6' = 1+12+15+6	13'+8'+3'+10' = 1+12-15-6	9'+4'+7'+14' = 1-12+15-6	5'+16'+11'+2' = 1-12-15+6
1'+12'-15'-6' = 13+8+3+10	13'+8'-3'-10' = 13+8-3-10	9'+4'-7'-14' = 13-8+3-10	5'+16'-11'-2' = 13-8-3+10
1'-12'+15'-6' = 9+4+7+14	13'-8'+3'-10' = 9+4-7-14	9'-4'+7'-14' = 9-4+7-14	5'-16'+11'-2' = 9-4-7+14
1'-12'-15'+6' = 5+16+11+2	13'-8'-3'+10' = 5+16-11-2	9'-4'-7'+14' = 5-16+11-2	5'-16'-11'+2' = 5-16-11+2
1'+12'+13'+8' = 1+12+13+8	15'+6'+3'+10' = 1+12-13-8	9'+4'+5'+16' = 1-12+13-8	7'+14'+11'+2' = 1-12-13+8
1'+12'-13'-8' = 15+6+3+10	15'+6'-3'-10' = 15+6-3-10	9'+4'-5'-16' = 15-6+3-10	7'+14'-11'-2' = 15-6-3+10
1'-12'+13'-8' = 9+4+5+16	15'-6'+3'-10' = 9+4-5-16	9'-4'+5'-16' = 9-4+5-16	7'-14'+11'-2' = 9-4-5+16
1'-12'-13'+8' = 7+14+11+2	15'-6'-3'+10' = 7+14-11-2	9'-4'-5'+16' = 7-14+11-2	7'-14'-11'+2' = 7-14-11+2
1'+12'+10'+3' = 1+12+10+3	15'+6'+8'+13' = 1+12-10-3	14'+7'+5'+16' = 1-12+10-3	4'+9'+11'+2' = 1-12-10+3
1'+12'-10'-3' = 15+6+8+13	15'+6'-8'-13' = 15+6-8-13	14'+7'-5'-16' = 15-6+8-13	4'+9'-11'-2' = 15-6-8+13
1'-12'+10'-3' = 14+7+5+16	15'-6'+8'-13' = 14+7-5-16	14'-7'+5'-16' = 14-7+5-16	4'-9'+11'-2' = 14-7-5+16
1'-12'-10'+3' = 4+9+11+2	15'-6'-8'+13' = 4+9-11-2	14'-7'-5'+16' = 4-9+11-2	4'-9'-11'+2' = 4-9-11+2
1'+9'+15'+7' = 1+9+15+7	13'+5'+3'+11' = 1+9-15-7	12'+4'+6'+14' = 1-9+15-7	8'+16'+10'+2' = 1-9-15+7
1'+9'-15'-7' = 13+5+3+11	13'+5'-3'-11' = 13+5-3-11	12'+4'-6'-14' = 13-5+3-11	8'+16'-10'-2' = 13-5-3+11
1'-9'+15'-7' = 12+4+6+14	13'-5'+3'-11' = 12+4-6-14	12'-4'+6'-14' = 12-4+6-14	8'-16'+10'-2' = 12-4-6+14
1'-9'-15'+7' = 8+16+10+2	13'-5'-3'+11' = 8+16-10-2	12'-4'-6'+14' = 8-16+10-2	8'-16'-10'+2' = 8-16-10+2

$1'+9'+13'+5'=1+9+13+5$	$15'+\bar{7}'+3'+11'=1+9-13-5$	$12'+4'+8'+16'=1-9+13-5$	$6'+14'+10'+2'=1-9-13+5$
$1'+9'-13'-5'=15+\bar{7}+3+11$	$15'+\bar{7}'-3'-11'=15+\bar{7}-3-11$	$12'+4'-\bar{8}'-16'=15-\bar{7}+3-11$	$6'+11'-10'-2'=15-\bar{7}-3+11$
$1'-9'+13'-5'=12+4+\bar{8}+16$	$15'-\bar{7}'+3'-11'=12+4-\bar{8}-16$	$12'-4'+8'-16'=12-4+\bar{8}-16$	$6'-\overline{14}'+10'-2'=12-4-\bar{8}+16$
$1'-9'-13'+5'=6+11+10+2$	$\overline{15}'-\bar{7}'-3'-11'=6+14-10-2$	$12'-4'-\bar{8}'+16'=6-11+10-2$	$6'-14'-10'+2'=6-\overline{14}-10+2$
$1'+9'+11'+3'=1+9+11+3$	$15'+\bar{7}'+5'+13'=1+9-11-3$	$11'+6'+8'+16'=1-9+11-3$	$4'+12'+10'+2'=1-9-11+3$
$1'+9-11'-3'=15+\bar{7}+5+13$	$\overline{15}'+\bar{7}'-5'-13'=\overline{15}+\bar{7}-5-13$	$11'+6'-\bar{8}'-16'=15-\bar{7}+5-13$	$4'+12'-10'-2'=15-\bar{7}-5+13$
$1'-9'+11'-3'=11+6+8+16$	$15'-\bar{7}'+5'-13'=14+6-\bar{8}-10$	$11'-6'+8'-16'=14-6+\bar{8}-16$	$4'-12'+10'-2'=14-6-\bar{8}+16$
$1'-9'-11'+3'=1+12+\overline{10}+2$	$15'-\bar{7}'-5'+13'=4+12-10-2$	$\overline{11}'-6'-\bar{8}'+16'=4-12+10-2$	$4'-12'-10'+2'=4-12-10+2$

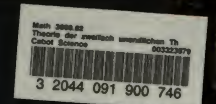
Tabelle II.

$1'+2'+16'+15'=1+7+6+4$	$7'+8'+10'+9'=1+7-6-4$	$6'+5'+11'+12'=1-\bar{7}+6-4$	$4'+3'+13'+14'=1-7-6+4$
$1'+2'-16'-15'=2+8+5+3$	$\bar{7}'+\bar{8}'-10'-9'=2+8-5-3$	$6'+5'-11'-12'=2-8+5-3$	$4'+3'-13'-14'=2-\bar{8}-5+3$
$1'-2'+16'-15'=16+\overline{10}+11+13$	$\bar{7}'-\bar{8}'+10'-9'=16+10-11-13$	$6'-5'+11'-\overline{12}'=16-10+11-13$	$4'-3'+13'-11'=16-10-11+13$
$1'-2'-16'+15'=15+9+12+\overline{11}$	$7'-8'-10'+9'=15+9-12-\overline{11}$	$6'-5'-11'+12'=15-9+12-11$	$4'-3'-13'+11'=\overline{15}-9-12+11$
$1'+\bar{7}'+6'+4'=1+2+16+15$	$2'+8'+5'+3'=1+2-16-15$	$16'+10'+11'+13'=1-2+16-15$	$15'+9'+12'+11'=1-2-16+15$
$1'+\bar{7}'-6'-4'=\bar{7}+\bar{8}+10+9$	$2'+\bar{8}'-5'-3'=7+8-\overline{10}-9$	$16'+10'-11'-13'=\bar{7}-\bar{8}+10-9$	$\overline{15}'+9'-12'-11'=7-8-\overline{10}+9$
$1'-\bar{7}'+6'-4'=6+5+11+12$	$2'-\bar{8}'+5'-3'=6+5-11-12$	$16'-\overline{10}'+11'-13'=6-5+11-\overline{12}$	$15'-9'+12'-11'=6-5-11+12$
$1'-\bar{7}'-6'+4'=4+3+13+14$	$2'-8'-5'+3'=4+3-13-11$	$16'-10'-11'+13'=4-3+13-14$	$15'-9'-12'+14'=4-3-13+11$
$1'+2'+14'+13'=1+5+8+4$	$5'+6'+10'+9'=1+5-\bar{8}-1$	$\bar{8}'+7'+11'+12'=1-5+\bar{8}-4$	$4'+3'+15'+16'=1-5-8+4$
$1'+2'-11'-13'=2+6+\bar{7}+3$	$5'+6'-10'-9'=2+6-\bar{7}-3$	$8'+\bar{7}'-11'-12'=2-6+7-3$	$4'+3'-15'-16'=2-6-7+3$
$1'-2'+14'-13'=11+10+11+15$	$5'-6'+10'-9'=11+10-11-15$	$\bar{8}'-\bar{7}'+11'-12'=11-\overline{10}+11-15$	$4'-3'+15'-16'=11-10-11+15$
$1'-2'-14'+13'=13+9+12+16$	$5'-6'-10'+9'=13+9-\overline{12}-16$	$8'-\bar{7}'-11'+12=13-9+12-16$	$4'-3'-15'+16'=13-9-12+16$
$1'+5'+\bar{8}'+4'=1+2+11+13$	$2'+6'+\bar{7}'+3'=1+2-11-13$	$11'+10'+11'+15'=1-2+\overline{11}-13$	$13'+9'+12'+16'=1-2-\overline{11}+13$
$1'+5'-\bar{8}'-4'=5+6+10+9$	$2'+6'-\bar{7}'-3'=5+6-10-9$	$11'+10'-11'-\overline{15}'=5-6+\overline{10}-9$	$13'+9'-12'-16'=5-6-10+9$
$1'-5'+\bar{8}'-4'=8+\bar{7}+11+12$	$2'-6'+\bar{7}'-3'=\bar{8}+7-11-12$	$14'-10'+11'-15'=\bar{8}-\bar{7}+11-12$	$13'-9'+12'-16'=\bar{8}-\bar{7}-11+12$
$1'-5'-\bar{8}'+4'=4+3+15+16$	$2'-6'-\bar{7}'+3'=4+3-15-16$	$11'-10'-11'+15'=4-3+15-16$	$13'-9'-12'+16'=4-3-15+16$

1′+2′+12′+11′=1+3+8+6	3′+4′+10′+9′=1+3−8−6	8′+7′+13′+14′=1−3+8−6	6′+5′+15′+16′=1−3−8+6
1′+2′−12′−11′=2+4+7+5	3′+4′−10′−9′=2+4−7−5	8′+7′−13′−14′=2−4+7−5	6′+5′−15′−16′=2−4−7+5
1′−2′+12′−11′=12+10+13+15	3′−4′+10′−9′=12+10−13−15	8′−7′+13′−14=12−10+13−15	6′−5′+15′−16′=12−10−13+15
1′−2′−12′+11′=11+9+14+16	3′−4′−10′+9′=11+9−14−16	8′−7′−13′+14′=11−9+14−16	6′−5′−15′+16′=11−9−14+16
1′+3′+8′+6′=1+2+12+11	2′+4′+7′+5′=1+2−12−11	12′+10′+13′+15′=1−2+12−11	11′+9′+14′+16′=1−2−12+11
1′+3′−8′−6′=3+4+10+9	2′+4′−7′−5′=3+4−10−9	12′+10′−13′−15′=3−4+10−9	11′+9′−14′−16′=3−4−10+9
1′−3′+8′−6′=8+7+13+14	2′−4′+7′−5′=8+7−13−14	12′−10′+13′−15′=8−7+13−14	11′−9′+14′−16′=8−7−13+14
1′−3′−8′+6′=6+5+15+16	2′−4′−7′+5′=6+5−15−16	12′−10′−13′+15′=6−5+15−16	11′−9′−14′+16′=6−5−15+16
1′+2′+9′+10′=1+3+5+7	3′+4′+11′+12′=1+3−5−7	5′+6′+13′+14′=1−3+5−7	7′+8′+15′+16′=1−3−5+7
1′+2′−9′−10′=2+4+6+8	3′+4′−11′−12′=2+4−6−8	5′+6′−13′−14′=2−4+6−8	7′+8′−15′−16′=2−4−6+8
1′−2′+9′−10′=9+11+13+15	3′−4′+11′−12′=9+11−13−15	5′−6′+13′−14′=9−11+13−15	7′−8′+15′−16′=9−11−13+15
1′−2′−9′+10′=10+12+14+16	3′−4′−11′+12′=10+12−14−16	5′−6′−13′+14′=10−12+14−16	7′−8′−15′+16′=10−12−14+16
1′+3′+5′+7′=1+2+9+10	2′+4′+6′+8′=1+2−9−10	9′+11′+13′+15′=1−2+9−10	10′+12′+14′+16′=1−2−9+10
1′+3′−5′−7′=3+4+11+12	2′+4′−6′+8′=3+4−11−12	9′+11′−13′−15′=3−4+11−12	10′+12′−14′−16′=3−4−11+12
1′−3′+5′−7′=5+6+13+14	2′−4′+6′−8′=5+6−13−14	9′−11′+13′−15′=5−6+13−14	10′−12′+14′−16′=5−6−13+14
1′−3′−5′+7′=7+8+15+16	2′−4′−6′+8′=7+8−15−16	9′−11′−13′+15′=7−8+15−16	10′−12′−14′+16′=7−8−15+16
1′+16′+14′+3′=1+11+10+4	11′+6′+8′+9′=1+11−10−4	10′+7′+5′+12′=1−11+10−4	4′+13′+15′+2′=1−11−10+4
1′+16′−14′−3′=16+6+7+13	11′+6′−8′−9′=16+6−7−13	10′+7′−5′−12′=16−6+7−13	4′+13′−15′−2′=16−6−7+13
1′−16′+14′−3′=14+8+5+15	11′−6′+8′−9′=14+8−5−15	10′−7′+5′−12′=14−8+5−15	4′−13′+15′−2′=14−8−5+15
1′−16′−14′+3′=3+9+12+2	11′−6′−8′+9′=3+9−12−2	10′−7′−5′+12′=3−9+12−2	4′−13′−15′+2′=3−9−12+2
1′+11′+10′+4′=1+16+14+3	16′+6′+7′+13′=1+16−14−3	14′+8′+5′+15′=1−16+14−3	3′+9′+12′+2′=1−16−14+3
1′+11′−10′−4′=11+6+8+9	16′+6′−7′−13′=11+6−8−9	14′+8′−5′−15′=11−6+8−9	3′+9′−12′−2′=11−6−8+9
1′−11′+10′−4′=10+7+5+12	16′−6′+7′−13′=10+7−5−12	14′−8′+5′−15′=10−7+5−12	3′−9′+12′−2′=10−7−5+12
1′−11′−10′+4′=4+13+15+2	16′−6′−7′+13′=4+13−15−2	14′−8′−5′+15′=4−13+15−2	3′−9′−12′+2′=4−13−15+2
1′+16′+12′+5′=1+13+10+6	13′+4′+8′+9′=1+13−10−6	10′+7′+3′+14′=1−13+10−6	5′+11′+15′+2′=1−13−10+6
1′+16′−12′−5′=16+4+7+11	13′+4′−8′−9′=16+4−7−11	10′+7′−3′−14′=16−4+7−11	6′+11′−15′−2′=16−4−7+11
1′−16′+12′−5′=12+8+3+15	13′−4′+8′−9′=12+8−3−15	10′−7′+3′−14′=12−8+3−15	6′−11′+15′−2′=12−8−3+15
1′−16′−12′+5′=5+9+14+2	13′−4′−8′+9′=5+9−14−2	10′−7′−3′+14′=5−9+14−2	6′−11′−15′+2′=5−9−14+2

$1'+13'+10'+6'=1+16+12+5$	$16'+1'+\bar{7}'+11'=1+16-12-5$	$12'+8'+3'+15'=1-16+12-5$	$5'+9'+14'+2'=1-16-12+5$
$1'+13'-10'-6'=13+4+\bar{8}+9$	$16'+4'-\bar{7}'-11'=13+4-\bar{8}-9$	$\bar{12}'+8'-3'-\bar{15}'=13-4+8-9$	$5'+9'-\bar{14}'-2'=13-1-8+9$
$1'-13'+10'-6'=10+7+3+\bar{14}$	$16'-4'+\bar{7}'-11'=10+7-3-11$	$12'-\bar{8}'+3'-15'=10-7+3-14$	$5'-9'+14'-2'=\bar{10}-\bar{7}-3+11$
$1'-13'-\bar{10}'+6'=6+11+\bar{15}+2$	$16'-4'-\bar{7}'+11'=6+11-\bar{15}-2$	$12'-\bar{8}'-3'+15'=6-11+15-2$	$5'-9'-14'+2'=6-11-15+2$
$1'+16'+9'+\bar{8}'=1+13+11+\bar{7}$	$13'+4'+5'+12'=1+13-11-7$	$11'+6'+3'+\bar{14}'=1-13+11-7$	$\bar{7}'+\bar{10}'+15'+2'=1-13-11+\bar{7}$
$1'+16'-9'-8'=16+4+6+10$	$13'+4'-5'-\bar{12}'=16+4-6-10$	$11'+6'-3'-14'=16-4+6-10$	$7'+10'-15'-2'=16-1-6+10$
$1'-16'+9'-\bar{8}'=9+5+3+\bar{15}$	$13'-4'+5'-\bar{12}'=9+5-3-\bar{15}$	$11'-6'+3'-11'=9-5+3-15$	$\bar{7}'-10'+\bar{15}'-2'=9-5-3+15$
$1'-16'-9'+\bar{8}'=\bar{8}+\bar{12}+14+2$	$13'-4'-5'+12'=8+12-14-2$	$11'-6'-3'+\bar{11}'=8-12+\bar{14}-2$	$7'-10'-15'+2'=\bar{8}-12-14+2$
$1'+13'+11'+7'=1+16+9+8$	$16'+4'+6'+10'=1+16-9-8$	$9'+5'+3'+15'=1-16+9-8$	$8'+12'+\bar{14}'+2'=1-16-9+\bar{8}$
$1'+13'-11'-\bar{7}'=13+4+5+12$	$16'+4'-6'-10'=13+1-5-\bar{12}$	$9'+5'-3'-15'=13-4+5-12$	$8'+\bar{12}'-14'-2'=13-4-5+12$
$1'-13'+11'-\bar{7}'=11+6+3+14$	$16'-4'+6'-10'=11+6-3-\bar{11}$	$9'-5'+3'-15'=11-6+3-11$	$\bar{8}'-12'+\bar{11}'-2'=11-6-3+14$
$1'-13'-11'+7'=7+10+15+2$	$16'-4'-6'+\bar{10}'=7+10-15-2$	$9'-5'-3'+\bar{15}'=\bar{7}-10+\bar{15}-2$	$8'-12'-14'+2'=\bar{7}-\bar{10}-15+2$
$1'+14'+12'+7'=1+15+10+8$	$15'+4'+6'+9'=1+15-10-8$	$10'+5'+3'+16'=1-15+10-8$	$8'+11'+13'+2'=1-15-10+8$
$1'+14'-12'-7'=14+4+5+11$	$15'+4'-6'-9'=\bar{11}+4-5-11$	$10'+5'-3'-16'=11-4+5-11$	$\bar{8}'+11'-13'-2'=\bar{14}-4-5+11$
$1'-11'+12'-7'=\bar{12}+6+3+13$	$15'-4'+6'-9'=\bar{12}+6-3-13$	$10'-5'+3'-16'=12-6+3-13$	$\bar{8}'-11'+13'-2'=12-6-3+13$
$1'-\bar{14}'-\bar{12}'+7'=\bar{7}+9+16+2$	$15'-4'-6'+9'=\bar{7}+9-16-2$	$\bar{10}'-5'-3'+16'=\bar{7}-9+16-2$	$8'-11'-13'+2'=\bar{7}-9-16+2$
$1'+\bar{15}'+\bar{10}'+8'=1+14+12+7$	$14'+4'+5'+11'=1+\bar{14}-12-7$	$12'+6'+3'+13'=1-14+12-7$	$7'+9'+16'+2'=1-\bar{14}-12+\bar{7}$
$1'+15'-10'-8'=\bar{15}+4+6+9$	$\bar{14}'+4'-5'-11'=15+4-6-9$	$12'+6'-3'-13'=15-4+6-9$	$7'+9'-16'-2'=15-1-6+9$
$1'-15'+\bar{10}'-8'=\bar{10}+5+3+16$	$14'-4'+5'-11'=\bar{10}+5-3-16$	$12'-6'+3'-13'=10-5+3-16$	$\bar{7}'-9'+16'-2'=10-5-3+16$
$1'-\bar{15}'-\bar{10}'+\bar{8}'=8+11+13+2$	$\bar{14}'-4'-5'+11'=8+11-13-2$	$12'-6'-3'+13'=8-11+13-2$	$7'-9'-16'+2'=8-11-13+2$
$1'+\bar{14}'+9'+6'=1+15+11+5$	$15'+4'+7'+\bar{12}'=1+15-11-5$	$11'+8'+3'+16'=1-15+11-5$	$5'+10'+13'+2'=1-15-11+5$
$1'+14'-9'-6'=14+4+8+10$	$15'+4'-\bar{7}'-12'=\bar{14}+4-8-10$	$11'+\bar{8}'-3'-16'=14-4+8-10$	$5'+10'-13'-2'=14-4-8+10$
$1'-\bar{14}'+9'-6'=9+\bar{7}+3+13$	$\bar{15}'-4'+7'-\bar{12}'=9+7-3-13$	$11'-\bar{8}'+3'-16'=9-\bar{7}+3-13$	$5'-\bar{10}'+13'-2'=9-\bar{7}-3+13$
$1'-\bar{11}'-9'+6'=6+12+16+2$	$15'-4'-\bar{7}'+12'=6+12-16-2$	$11'-8'-3'+16'=6-\bar{12}+16-2$	$5'-10'-13'+2'=6-12-16+2$
$1'+15'+11'+5'=1+14+9+6$	$14'+4'+8'+\bar{10}'=1+\bar{14}-9-6$	$9'+\bar{7}'+3'+13'=1-\bar{14}+9-6$	$6'+\bar{12}'+16'+2'=1-\bar{14}-9+6$
$1'+\bar{15}'-11'-5'=15+4+7+12$	$14'+4'-8'-10'=15+4-7-12$	$9'+7'-3'-13'=15-4+7-\bar{12}$	$6'+12'-16'-2'=15-4-7+12$
$1'-15'+11'-5'=11+8+3+16$	$14'-4'+8'-\bar{10}'=11+8-3-16$	$9'-\bar{7}'+3'-13'=11-8+3-16$	$6'-12'+16'-2'=11-\bar{8}-3+16$
$1'-\bar{15}'-11'+5'=5+10+13+2$	$\bar{14}'-4'-\bar{8}'+\bar{10}'=5+\bar{10}-13-2$	$9'-\bar{7}'-3'+13'=5-\bar{10}+13-2$	$6'-12'-16'+2'=5-10-13+2$

$1'+\overline{12}'+9'+4'=1+\overline{15}+13+3$	$\overline{15}'+6'+\overline{7}'+14'=1+\overline{15}-13-3$	$13'+\overline{8}'+5'+16'=1-15+13-3$	$3'+10'+11'+2'=1-15-13+3$
$1'+\overline{12}'-9'-4'=12+6+\overline{8}+\overline{10}$	$15'+6'-\overline{7}'-\overline{14}'=12+6-\overline{8}-10$	$13'+8'-5'-16'=\overline{12}-6+\overline{8}-10$	$3'+10'-11'-2'=\overline{12}-6-\overline{8}+\overline{10}$
$1'-12'+9'-4'=9+\overline{7}+5+11$	$15'-6'+\overline{7}'-\overline{14}'=9+\overline{7}-5-11$	$13'-8'+5'-16'=9-\overline{7}+5-11$	$3'-10'+11'-2'=9-\overline{7}-5+11$
$1'-\overline{12}'-9'+4'=4+\overline{14}+16+2$	$15'-6'-\overline{7}'+14'=4+14-16-2$	$13'-\overline{8}'-5'+16'=4-\overline{14}+16-2$	$3'-\overline{10}'-11'+2'=4-14-16+2$
$1'+\overline{15}'+13'+3'=1+12+9+4$	$12'+6'+\overline{8}'+10'=1+12-9-4$	$9'+\overline{7}'+5'+11'=1-12+9-4$	$4'+14'+16'+2'=1-\overline{12}-9+4$
$1'+15'-13'-3'=\overline{15}+6+\overline{7}+14$	$12'+6'-\overline{8}'-\overline{10}'=15+6-7-14$	$9'+7'-5'-11'=15-6+\overline{7}-14$	$4'+\overline{14}'-16'-2'=15-6-7+14$
$1'-15'+13'-3'=13+\overline{8}+5+16$	$\overline{12}'-6'+\overline{8}'-10'=13+\overline{8}-5-16$	$9'-\overline{7}'+5'-11'=13-\overline{8}+5-16$	$4'-\overline{14}'+16'-2'=13-\overline{8}-5+16$
$1'-\overline{15}'-13'+3'=3+10+11+2$	$\overline{12}'-6'-\overline{8}'+10'=3+10-11-2$	$9'-7'-5'+11'=3-10+11-2$	$4'-\overline{14}'-16'+2'=3-10-11+2$


Math 3008.82
Theorie der zweifach unendlichen Th
Cabot Science
003323979
3 2044 091 900 746